X Mathematics D 13 J

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 163

Heft 4

Ausgegeben den 22. Dezember 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Band 163. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schönhardt, Erich, Über lateinische Quadrate und Unionen	183
Keller, Ott-Heinrich, Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln . .	231
Bauer, Michael, Über einen Takagischen Satz	249
Sidon, S., Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen	251

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über lateinische Quadrate und Unionen.

Von *Erich Schönhardt* in Tübingen.

Inhalt.

Seite.
Einleitung 183
I. Lateinische Quadrate und zugehörige Gruppen 185
§ 1. Umordnung und Verwandtschaft von Matrizen 185
§ 2. Lateinische Quadrate und ihre Umordnungen in sich 187
§ 3. Transformationsgruppe eines lateinischen Quadrats 188
§ 4. Koordinierte Quadrate 192
§ 5. Erweiterungen 197
II. Unionen 201
§ 6. Union und lateinisches Quadrat 201
§ 7. Automorphismen. Einteilung der Übergangssubstitutionen 203
§ 8. Verwandte Unionen. Assoziativität 207
§ 9. Einteilung der lateinischen Quadrate 210
§ 10. Gruppen 213
III. Spezieller Teil: Die lateinischen Quadrate und Unionen der Ordnungen fünf und sechs 218
§ 11. Einleitung und der Fall $n = 5$ 218
§ 12. Der Fall $n = 6$ 221

Unter einem lateinischen Quadrat [1]) versteht man seit *Euler* ein quadratisches Schema, dessen n^2 Felder mit n verschiedenen Buchstaben oder Ziffern derart besetzt sind, daß in keiner Zeile und in keiner Spalte zwei gleiche vorkommen. (Die Cayleyschen Gruppentafeln sind bekanntlich spezielle lateinische Quadrate.)

Diese Gebilde sind bis heute wenig Gegenstand allgemeiner Untersuchungen gewesen [2]), auch wurden sie meist nicht um ihrer selbst willen, sondern als Mittel zum Zweck der Lösung anderer kombinatorischer Probleme, z. B. des Problems der 36 Offiziere, der Konstruktion magischer Quadrate, betrachtet. In den diesbezüglichen Arbeiten handelt es sich fast durchweg um folgende beiden Grundaufgaben: Ermittlung der Anzahl der sogen. reduzierten Quadrate [3]) einer bestimmten Ordnung n und Zurückführung der Gesamtheit aller Quadrate n-ter Ordnung auf möglichst wenig Typen. Nachdem das erstere Problem für kleinere spezielle Werte von n, und zwar für $n = 5$ von *Cayley* [4]), für $n \leqq 7$ von *M. Frolov* [5]) auf direktem Wege in Angriff genommen und gelöst worden

[1]) Wegen der Herkunft dieser Bezeichnung vgl. *Ahrens*, Mathematische Unterhaltungen und Spiele II, 2. Aufl. (1918), S. 63, wo beiläufig darauf hingewiesen ist, daß Euler nicht der erste war, der sich mit solchen Gebilden beschäftigt hat. Von französischen Autoren wird statt „carré latin" auch der Ausdruck „permutation carrée" gebraucht.

[2]) So konnte *E. Netto* 1901 in seiner „Kombinatorik" (S. 74) mit einer gewissen Berechtigung sagen, die Behandlung dieser Gebilde sei noch nicht über das Stadium der Spielerei hinausgelangt.

[3]) Siehe § 2 am Anfang.

[4]) *A. Cayley*, On latin squares, Mess. of Math. **19** (1890), p. 135—137 = Coll. Pap. **13** (1897), p. 55—57.

[5]) *M. Frolov*, Recherches sur les permutations carrées, Journ. de Math. spéc. (Longchamps) (3) **4** (1890), p. 8—11; 25—30.

war, gab *P. A. Mac Mahon* [1]) eine allgemeine Lösung desselben mit Hilfe von symmetrischen Funktionen. Von dem letzteren Problem lieferte *G. Tarry* [2]) eine Lösung für den Fall $n = 6$.

In der vorliegenden Abhandlung wird der Versuch unternommen, eine allgemeine Theorie der lateinischen Quadrate anzubahnen. Sie gliedert sich in drei Abschnitte. Im Zentrum des ersten Abschnitts, wo die Gruppen derjenigen Operationen eingeführt werden, gegenüber denen ein Quadrat invariant ist, steht der Begriff der „Transformationsgruppe" eines Quadrats (§ 3). Diese Gruppe kann unter Umständen erweitert werden unter Zuhilfenahme einer oder mehrerer Operationen aus einer gewissen Gruppe $\mathfrak{R}$ der sechsten Ordnung, vermöge deren immer sechs „koordinierte" Quadrate miteinander verbunden sind (§ 4). Es erweist sich dabei als zweckmäßig, nebeneinander drei gleichberechtigte „Fundamentalsysteme" von je n Substitutionen zu betrachten, durch deren einzelnes ein Quadrat schon vollständig bestimmt ist. Zwischen den Fundamentalsystemen und zwischen den Transformationsgruppen koordinierter Quadrate bestehen dann nämlich sehr einfache Beziehungen (Satz 5 und 6), und überhaupt wird dadurch eine weitgehende Symmetrisierung erreicht, die ihren Ausdruck in Satz 6* findet. Der Zusammenhang zwischen den sechs koordinierten Quadraten erhält durch eine einfache räumliche Figur einen anschaulichen Inhalt (§ 4 Schluß). In § 5 wird dann eine der möglichen Erweiterungen der Transformationsgruppe noch näher ausgeführt.

Im zweiten Abschnitt wird jedes lateinische Quadrat als Verknüpfungstafel einer „Union" angesehen, d. h. eines Systems von Elementen, das bis auf das assoziative Gesetz Gruppencharakter besitzt (§ 6) [3]). Die Automorphismengruppe kann für Unionen in derselben Weise wie für Gruppen definiert werden. Wie sie aus dem Quadrat zu bestimmen ist, wird in § 7 angegeben. Ihr Verhältnis zur Transformationsgruppe des Quadrats wird besonders einfach, wenn dasselbe reduziert ist (Satz 14). In jeder Union lassen sich drei Untergruppen definieren, für deren Elemente das assoziative Gesetz innerhalb der Union mit einer gewissen Einschränkung gültig ist (§ 6). Diese Untergruppen erweisen sich als isomorph mit drei wichtigen Normalteilern der Transformationsgruppe des betreffenden Quadrats (Satz 19*). Daraus ergibt sich nebenbei eine einfache Charakterisierung der Gruppentafeln unter den lateinischen Quadraten durch eine Eigenschaft ihrer Transformationsgruppe (Satz 20 und 20*). In § 9 werden die vorhergegangenen Überlegungen zu einer naturgemäßen Einteilung der lateinischen Quadrate einer bestimmten Ordnung in Grundklassen, Klassen, Gattungen und Familien verwendet. In einer Gattung sind dabei alle Quadrate vereinigt, welche Verknüpfungstafeln isomorpher Unionen sind. Die Aufspaltung der Klassen in Gattungen liefert also zugleich die verschiedenen Typen von Unionen der betreffenden Ordnung. Die Aufzählung der in einer Grundklasse enthaltenen Gattungen wird außerordentlich erleichtert durch die Herstellung einer ein-eindeutigen Korrespondenz zwischen den Gattungen koordinierter Klassen (Satz 23).

Schließlich wird in § 10 untersucht, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn das Quadrat eine Gruppentafel ist. Dabei ergibt sich unter anderem eine neue Deutung der Holomorphie einer Gruppe, sowie eine Anzahl mit dem assoziativen Gesetz äquivalenter Eigenschaften der Gruppentafel.

---

[1]) *P. A. Mac Mahon*, A new method in combinatory analysis etc. Trans. Cambr. Phil. Soc. **16** (1898), p. 262—290. Vgl. auch: Combinatory Analysis I (Cambridge 1915), Sect. V, Chap. III.

[2]) *G. Tarry*, Le problème des 36 officiers, Assoc. Franç. pour l'avanc. des sc. 29 e session (Paris 1900) I (1900), p. 122—23; II (1901), p. 170—203.

[3]) Auf diese Betrachtungsweise der lateinischen Quadrate hat auch *E. Skolem* in einer Anmerkung zur zweiten Auflage von Nettos Kombinatorik (1927, S. 312/13) hingewiesen.

Im dritten Abschnitt werden die Quadrate und Unionen fünfter und sechster Ordnung behandelt. Es zeigt sich, daß die Quadrate fünfter Ordnung sich auf zwei Grundtypen zurückführen lassen, und daß es außer der zyklischen Gruppe noch fünf verschiedene Typen von Unionen fünfter Ordnung gibt. Bei den Quadraten der sechsten Ordnung ergibt sich eine Bestätigung der Richtigkeit der von Tarry gefundenen 17 Typen, zugleich aber durch die Einführung der Grundklassen eine weitere Reduktion derselben auf 12 Grundtypen[1]). Neben der zyklischen und der Diedergruppe gibt es noch 107 verschiedene Typen von Unionen sechster Ordnung. Unter diesen ist besonders der Typus III bemerkenswert, dessen Grundklasse, wie bei einer Gruppe, nur eine einzige Gattung enthält (Satz 24).

I. Lateinische Quadrate und zugehörige Gruppen.

§ 1. Umordnung und Verwandtschaft von Matrizen.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf n-reihige quadratische Matrizen, welche in keiner Zeile oder Spalte zwei gleiche Elemente enthalten. Unter einer Matrix soll hier immer eine der genannten Art verstanden werden.

Umordnung einer Matrix heiße jede Operation, welche sich aus einer Vertauschung ihrer Zeilen und einer Vertauschung ihrer Spalten zusammensetzt. Diese beiden Komponenten der Umordnung sind miteinander vertauschbar. Jede derselben ist durch eine Substitution bestimmt. Unter

$$U = \binom{\nu}{\nu'} \Big| \binom{\nu}{\nu''} = \mathfrak{s} \mid \mathfrak{t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

soll diejenige Umordnung verstanden werden, bei welcher die ν-te Zeile[2]) an die Stelle der ν'-ten, die ν-te Spalte[2]) an die Stelle der ν''-ten gelangt. Diese beiden Substitutionen brauchen natürlich als solche nicht miteinander vertauschbar zu sein.

Unterwirft man eine Matrix der Umordnung U und die so entstandene Matrix einer zweiten Umordnung

$$U_1 = \binom{\nu}{\nu^*} \Big| \binom{\nu}{\nu^{**}} = \mathfrak{s}_1 \mid \mathfrak{t}_1,$$

so resultiert eine Matrix, die auch vermöge einer einzigen Umordnung U_2 aus der ursprünglichen gewonnen werden kann, und es ist

$$U_2 = UU_1 = \binom{\nu}{(\nu')^*} \Big| \binom{\nu}{(\nu'')^{**}} = \mathfrak{s}\mathfrak{s}_1 \mid \mathfrak{t}\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{s}_2 \mid \mathfrak{t}_2.$$

Bei dieser Zusammensetzung von zwei Umordnungen hat man also einfach in üblicher Weise die „Produkte" entsprechender Komponenten zu bilden.

Mit der genannten Verknüpfungsvorschrift bilden die sämtlichen Umordnungen einer Matrix eine Gruppe. Das Einheitselement dieser Gruppe ist die *identische* Umordnung $\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e}$, wo $\mathfrak{e}$ die identische Substitution bedeutet. Die Gruppe ist offenbar isomorph[3]) mit dem direkten Produkt der beiden symmetrischen Substitutionsgruppen, welche mit Hilfe von zwei verschiedenen Reihen von je n Elementen gebildet werden können.

---

[1]) Betr. den Unterschied zwischen der hier gegebenen und der Tarryschen Einteilung siehe auch § 11 Einleitung.

[2]) Die Numerierung der Zeilen ist dabei in üblicher Weise von oben nach unten, die der Spalten von links nach rechts gedacht.

[3]) Der Ausdruck „isomorph" wird hier und im folgenden immer im Sinne von „holoedrisch isomorph" gebraucht.

Eine Umordnung werde *gerade* bzw. *ungerade* genannt, je nachdem die Substitution $\mathfrak{S}$t gerade oder ungerade ist.

Umordnung einer Matrix in sich heiße speziell eine solche, welche die Matrix in eine ihr gleiche überführt. Auch diese bilden eine Gruppe, die *Umordnungsgruppe* der betreffenden Matrix. Wegen der oben über die Matrizen gemachten Voraussetzung ist jede darin enthaltene Operation durch eine ihrer Komponenten vollkommen bestimmt und setzt, wenn sie von der identischen verschieden ist, alle Zeilen und alle Spalten um. Bliebe nämlich z. B. eine Zeile an ihrem Platz, so müßte auch jedes ihrer Elemente, da diese alle voneinander verschieden sind, seine Stelle behalten, die Spalten würden also nicht permutiert, und die Operation würde sich auf die identische reduzieren. Demnach sind die beiden Komponenten einer jeden Umordnung in sich von der Klasse n, und daraus folgt in bekannter Weise, daß sie auch regulär sein müssen.

Die ersten Komponenten der Umordnungen i. s. bilden, ebenso wie die zweiten, für sich eine Gruppe, und zwischen allen drei Gruppen besteht Isomorphismus, wobei eine Umordnung und ihre Komponenten einander zugeordnet sind. Insbesondere sind also die beiden Komponenten von derselben Ordnung, setzen sich darum aus gleichvielen elementefremden Zykeln gleicher Ordnung zusammen und sind folglich beide gerade oder beide ungerade. Daraus geht hervor, daß jede Umordnung i. s. gerade ist [1]).

Nun sei ω die Ordnung der Umordnungsgruppe. Da in jeder der Komponentengruppen nur Substitutionen n-ter Klasse enthalten sind, so gibt es dort höchstens eine Substitution, welche die Ziffer p durch die Ziffer q ersetzt, es sind also immer ω Ziffern transitiv verbunden. Die Anzahl dieser transitiven Teilsysteme ist aber dann n/ω, und folglich ist ω ein (echter oder unechter) Teiler von n. Betrachtet man nur die Vertauschungen innerhalb eines der transitiven Systeme, so bilden dieselben eine mit der Umordnungsgruppe isomorphe reguläre Gruppe. Für $\omega = n$ werden die Komponentengruppen selbst regulär.

Notwendig für die Existenz einer nicht identischen Umordnung i. s. ist das Vorhandensein gleicher Elemente in der Matrix. Gleiche Elemente, welche bei den Umordnungen der Matrix in sich ihre Plätze untereinander vertauschen, nennen wir *verwandt*, ebenso diejenigen Reihen der Matrix, welche dabei untereinander permutiert werden.

Das für das Folgende wesentliche kann zusammengefaßt werden in dem

Satz 1: Enthält eine n-reihige quadratische Matrix in keiner ihrer Reihen zwei gleiche Elemente, so ist jede Umordnung derselben in sich gerade, und ihre Komponenten sind reguläre Substitutionen der Klasse n. Besitzt die Umordnungsgruppe die Ordnung ω, so ist ω echter oder unechter Teiler von n, und es zerfallen die Reihen der Matrix, ebenso wie ihre Elemente, in Systeme von je ω verwandten derart, daß bei jeder nicht identischen Umordnung in sich die Reihen bzw. Elemente innerhalb der Systeme permutiert werden, und keine Reihe, also auch kein Element am ursprünglichen Platze bleibt. Es gibt nur eine einzige Umordnung in sich, welche von zwei verwandten Elementen der Matrix das erste an die Stelle des zweiten bringt. Ist speziell n eine Primzahl, so besitzt die Matrix entweder n Umordnungen in sich oder nur die identische.

Zwei Matrizen, von denen die eine durch Umordnung in die andere übergeführt werden kann, heißen ebenfalls *verwandt* und zwar *direkt*, wenn die Umordnung gerade,

---

[1]) Diese Aussage stützt sich wesentlich auf obige Voraussetzung bezüglich der Matrizen, z. B. besitzt die Matrix $\left\|\begin{matrix}1&2\\1&2\end{matrix}\right\|$, bei welcher diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, die ungerade Umordnung i. s. (1 2) | e.

und *indirekt*, wenn sie ungerade ist. Die beiden Aussagen schließen einander gegenseitig aus, weil es nur gerade Umordnungen einer Matrix in sich gibt. Beim Übergang von einer Matrix zu einer verwandten ändert sich die Anzahl ihrer Umordnungen in sich nicht, denn die Umordnungsgruppe erfährt lediglich eine Transformation.

§ 2. Lateinische Quadrate und ihre Umordnungen in sich.

Unterwirft man die Matrizen von § 1 noch der weiteren Bedingung, daß unter ihren Elementen nur n verschiedene vorkommen sollen, so erhält man die sogenannten *lateinischen* Quadrate. Die n verschiedenen Elemente werden im folgenden stets durch die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet. In jeder Reihe der Matrix tritt dann jede der n Ziffern gerade einmal auf [1]). *Reduziert* heißt ein solches Quadrat [2]), wenn die Ziffern in der ersten Zeile und Spalte die natürliche Reihenfolge aufweisen, *k-normiert*, wenn alle n Ziffern k in der Hauptdiagonale stehen. Der *Ursprung* des Quadrats ist das erste Feld der ersten Zeile.

Durch Zuordnung der natürlichen Folge $1, 2, \ldots, n$ zu den in den einzelnen Zeilen und Spalten stehenden Permutationen dieser Ziffern ergeben sich die *zeilen-* bzw. *spaltenerzeugenden Substitutionen*:

$$(1) \qquad s_i^{-1} = \begin{pmatrix} \nu \\ a_{i\nu} \end{pmatrix};\ t_k = \begin{pmatrix} \nu \\ a_{\nu k} \end{pmatrix}; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wo a_{ik} das in der i-ten Zeile und k-ten Spalte des Quadrats stehende Element bedeutet. Durch eines dieser beiden Systeme von Erzeugenden ist das Quadrat vollkommen bestimmt [3]).

Mit Hilfe der Erzeugenden lassen sich alle Substitutionen, welche durch Zuordnung irgend zweier Zeilen oder Spalten des Quadrats entstehen, darstellen in der Form:

$$s_i\, s_k^{-1} \quad \text{bzw.} \quad t_i^{-1}\, t_k.$$

Wir nennen sie *Zeilen- bzw. Spaltensubstitutionen* und bilden aus ihnen die *Zeilen- bzw. Spaltenkomplexe*:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{K}}_\nu^s &= (s_\nu\, s_1^{-1}, s_\nu\, s_2^{-1}, \ldots, s_\nu\, s_n^{-1}) \\ \mathfrak{K}_\nu^t &= (t_\nu^{-1}\, t_1,\ t_\nu^{-1}\, t_2, \ldots,\ t_\nu^{-1}\, t_n) \end{aligned}$$

indem wir immer diejenigen n Substitutionen zusammenfassen, welche durch Zuordnung einer bestimmten Reihe zu sich selbst und allen übrigen derselben Art definiert sind [4]).

Bezüglich der Umordnungen eines Quadrats in sich gilt Satz 1. Die Existenz von Umordnungen in sich kommt in sehr einfacher Weise in den eben definierten Komplexen zum Ausdruck. Sagen wir nämlich, zur ν-ten Zeile bzw. Spalte gehöre der Komplex $\overline{\mathfrak{K}}_\nu^s$ bzw. $\mathfrak{K}_\nu^t$, so gilt der

Satz 2: Zu verwandten Zeilen sowie zu verwandten Spalten gehören gleiche Komplexe und umgekehrt.

In der Tat gibt es, wenn zwei Reihen eines Quadrates Q verwandt sind, eine Umordnung von Q in sich, welche die erste derselben an die Stelle der zweiten bringt. Da sich Q aber hierbei nicht geändert hat, müssen die betreffenden Komplexe überein-

[1]) Das Quadrat ist erst dann als gegeben zu betrachten, wenn es, wie eine Matrix, orientiert ist. Die Zeilen und Spalten sind dann wie dort zu numerieren, d. h. von oben nach unten bzw. von links nach rechts.

[2]) *Mac Mahon* gebraucht den Ausdruck „reduced". — Von hier ab steht „Quadrat" immer für „lateinisches Quadrat".

[3]) Im reduzierten Quadrat ist s_1 und t_1 gleich der identischen Substitution.

[4]) Die Komplexe der Zeilen- und Spaltensubstitutionen werden schon von *Tarry* zum Zwecke der invarianten Kennzeichnung eines Quadrats verwendet (Näheres siehe § 11 Einleitung). Von den Substitutionen des ersten Zeilenkomplexes machen *Cayley*, *Frolov*, *Maillet* u. a. Gebrauch.

stimmen. Sind umgekehrt etwa zwei Zeilenkomplexe einander gleich, so stelle man durch Umordnung von Q zwei reduzierte Quadrate her, in denen die beiden zugehörigen Zeilen an die erste Stelle gelangt sind. Dann müssen diese reduzierten Quadrate wegen der Gleichheit der Komplexe übereinstimmen, und Q besitzt somit eine Umordnung in sich, welche die eine der beiden Zeilen an die Stelle der andern bringt.

In Verbindung mit Satz 1 folgt hieraus: Hat die Umordnungsgruppe eines Quadrats die Ordnung ω, so zerfällt die Gesamtheit der Zeilenkomplexe, sowie der Spaltenkomplexe in lauter verschiedene Systeme von je ω gleichen Komplexen. Sind umgekehrt etwa von den Zeilenkomplexen genau ω einander gleich, so ist die Umordnungsgruppe von der Ordnung ω, und folglich zerfällt die Gesamtheit der Komplexe in Systeme von je ω gleichen.

Die Verwandtschaft zweier Elemente eines Quadrats kann noch in anderer Weise zum Ausdruck gebracht werden. Versteht man nämlich unter dem *Komplement* A_{ik} des Elements a_{ik} die Matrix, welche aus dem Quadrat Q durch Unterdrückung der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht [1]), so gilt einschließlich seiner Umkehrung der

Satz 3: Die Komplemente verwandter Elemente eines Quadrats sind ebenfalls verwandt und zwar direkt oder indirekt, je nachdem die Indizessumme der beiden Elemente gerade oder ungerade ist.

Man sieht dies bequem ein, wenn man aus dem Quadrat Q zunächst durch Umordnung zwei andere Quadrate Q_{lm} und $Q_{\lambda\mu}$ herstellt. Q_{lm} entstehe aus Q dadurch, daß die l-te Zeile sowie die m-te Spalte über die vorhergehenden Reihen hinweg an die erste Stelle geschoben wird, und entsprechend ist $Q_{\lambda\mu}$ gebildet. Im Ursprung dieser neuen Quadrate befinden sich dann die Elemente a_{lm} bzw. $a_{\lambda\mu}$ von Q, und ihre Komplemente sind nach wie vor A_{lm} bzw. $A_{\lambda\mu}$.

Sind nun a_{lm} und $a_{\lambda\mu}$ in Q verwandt, so muß es, weil jede Umordnung von Q in sich gerade ist, eine gleichzeitig mit $l+m+\lambda+\mu$ gerade oder ungerade Umordnung geben, welche Q_{lm} in $Q_{\lambda\mu}$ überführt und dabei das Ursprungselement vollkommen in Ruhe läßt. Ihre erste Komponente läßt demnach die erste Zeile, ihre zweite die erste Spalte an ihrem Platze und folglich führt sie A_{lm} in $A_{\lambda\mu}$ über.

Zum Beweis der Umkehrung hat man nur zu zeigen, daß Q_{lm} in $Q_{\lambda\mu}$ übergeführt werden kann durch eine Umordnung, welche zugleich mit $l+m+\lambda+\mu$ gerade oder ungerade ist und das Ursprungselement in Ruhe läßt. Nach Voraussetzung gibt es aber eine Umordnung von diesem Charakter, welche A_{lm} in $A_{\lambda\mu}$ verwandelt. Man vervollständige nun einfach A_{lm} durch Ränderung oben und links zu Q_{lm} und lasse die neuen Randelemente an dieser Umordnung teilnehmen. Es entsteht so aus Q_{lm} ein Quadrat, dessen Ursprungselement samt seinem Komplement mit den entsprechenden Teilen von $Q_{\lambda\mu}$ übereinstimmt. Da aber ein Quadrat durch diese beiden Teile vollständig bestimmt ist, führt die genannte Umordnung tatsächlich Q_{lm} in $Q_{\lambda\mu}$ über.

§ 3. Transformationsgruppe eines lateinischen Quadrats.

Eine *Transformation* C eines Quadrats besteht aus einer Umordnung U und einer auf seine Ziffern ausgeübten Substitution $\mathfrak{u}$. Sie hat also drei Komponenten, deren jede durch eine Substitution der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ dargestellt werden kann. Wir schreiben:

$$C = U\,\mathfrak{u} = \mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{u} = \binom{\nu}{\nu'}\left|\binom{\nu}{\nu''}\right|\binom{\nu}{\nu'''}. \tag{3}$$

In dieser Schreibweise bedeuten demnach die beiden ersten Substitutionen immer die Zeilen- und Spaltenkomponenten der Umordnung, während die dritte sich auf die Ziffern

[1]) Die A_{ik} sind Matrizen von der in § 1 betrachteten Art.

des Quadrats bezieht und die Ziffer ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) überall da, wo sie als Element des Quadrats auftritt, durch die Ziffer ν''' ersetzen soll. Als Operationen betrachtet sind die Komponenten wieder miteinander vertauschbar [1]).

Bildet man aus C und einer anderen Transformation $C_1 = \mathfrak{s}_1 \mid \mathfrak{t}_1 \mid \mathfrak{u}_1$ eine neue Transformation C_2 durch folgende Verknüpfung:

$$C_2 = CC_1 = \mathfrak{s}\mathfrak{s}_1 \mid \mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1 \mid \mathfrak{u}\,\mathfrak{u}_1,$$

so entsteht bei Ausübung von C_2 auf ein Quadrat Q derselbe Effekt, wie wenn man Q zuerst der Transformation C und das so entstandene Quadrat der Transformation C_1 unterwirft. Mit der angegebenen Verknüpfungsvorschrift bilden die sämtlichen Transformationen eines Quadrats eine Gruppe $\mathfrak{C}$, deren Einheitselement die *identische* Transformation $\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \mid \mathfrak{e}$ ist.

Die *Transformationen eines Quadrats in sich* haben speziell die Eigenschaft, dasselbe in ein gleiches überzuführen. Sie bilden ebenfalls eine Gruppe, die *Transformationsgruppe* Γ des Quadrats. Jede in ihr enthaltene Operation ist durch zwei ihrer drei Komponenten vollkommen bestimmt. Die dritte Komponente einer Transformation i. s. heißt *Übergangssubstitution*. Eine Umordnung kann also, wenn überhaupt, so nur auf eine einzige Weise durch eine Übergangssubstitution zu einer Transformation i. s. ergänzt werden. Dagegen gehören zu einer Übergangssubstitution unter Umständen mehrere Umordnungen, nämlich außer U alle von der Form U_3U, wo U_3 in der Umordnungsgruppe enthalten ist. Die Übergangssubstitutionen $\mathfrak{u}$ bilden offenbar für sich eine Gruppe, die *Übergangsgruppe* $\mathfrak{U}$ des Quadrats. Ebenso bilden die ersten Komponenten der Transformationen i. s. die Gruppe $\mathfrak{S}$, die zweiten die Gruppe $\mathfrak{T}$. Unterdrückt man ferner in den Transformationen i. s. die erste bzw. zweite bzw. dritte Komponente, so bilden auch die so gewonnenen Operationen je eine Gruppe Σ bzw. T bzw. Ω.

Diejenigen Operationen von Γ, deren r-te Komponente ($r = 1, 2, 3$) die Einheitssubstitution ist, bilden einen Normalteiler Γ_r der Ordnung γ_r, und ihm entsprechen die Normalteiler Σ_r, T_r, Ω_r von Σ, T, Ω sowie die Normalteiler $\mathfrak{S}_r$, $\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{U}_r$ von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$. Dabei reduzieren sich $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{U}_3$ auf das Einheitselement. Speziell ist Ω_3 die schon oben eingeführte Umordnungsgruppe.

Man kann sich nun die Transformationsgruppe Γ entstanden denken durch Koppelung der drei Gruppen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, etwa in der Weise, daß zuerst durch Kombination von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ die Gruppe Ω hergestellt und dann diese mit $\mathfrak{U}$ gekoppelt wird. Bezüglich der Koppelung von zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit den Elementen A_λ bzw. B_μ gilt bekanntlich folgendes [2]): Sollen die durch Koppelung hergestellten Elemente (A_λ, B_μ) mit der Verknüpfungsvorschrift

$$(A_\lambda, B_\mu)(A_{\lambda'}, B_{\mu'}) = (A_\lambda A_{\lambda'}, B_\mu B_{\mu'})$$

eine Gruppe Γ bilden, so müssen die Elemente der Form $(E, B_{\mu 0})$ und die der Form $(A_{\lambda 0}, E)$ je einen Normalteiler Γ_a bzw. Γ_b von Γ ausmachen, ebenso die Elemente $A_{\lambda 0}$ bzw. $B_{\mu 0}$ den Normalteiler $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, bzw. $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$, und zwischen diesen Gruppen und ihren Faktorgruppen bestehen folgende Beziehungen, wobei das Gleichheitszeichen Isomorphismus ausdrückt:

$$\Gamma/\Gamma_a = \mathfrak{G}; \quad \Gamma/\Gamma_b = \mathfrak{H}; \quad \Gamma_a = \mathfrak{H}'; \quad \Gamma_b = \mathfrak{G}'; \quad \Gamma/\Gamma_a\Gamma_b = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}' = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}'.$$

Hier bedeutet $\Gamma_a\Gamma_b$ das direkte Produkt der beiden Gruppen.

---

[1]) Von dem Begriff der Transformationen ist, wenn auch nicht in dieser expliziten Form, schon von früheren Autoren, insbesondere von *Tarry* Gebrauch gemacht worden. (Vgl. § 11 Einleitung).

[2]) *E. Goursat*, Sur les substitutions orthogonales etc., Ann. de l'école normale (3) **VI** (1889), p. 1—102, spez. Abschnitt II.

Die Anwendung auf den vorliegenden Fall liefert die Relationen:

$$\Gamma = \Sigma = \mathsf{T} = \Omega \tag{4}$$

$$\Gamma_r = \Sigma_r = \mathsf{T}_r = \Omega_r = \mathfrak{S}_r = \mathfrak{T}_r = \mathfrak{U}_r \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{5}$$

(mit Ausnahme von $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{U}_3 = \{e\}$)

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{S} = \Gamma/\Gamma_1 = \Sigma/\Sigma_1 = \mathsf{T}/\mathsf{T}_1 = \Omega/\Omega_1; & \Sigma/\Sigma_2\Sigma_3 = \mathfrak{T}/\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{U}/\mathfrak{U}_2 = \Gamma/\Gamma_2\Gamma_3 \\ \mathfrak{T} = \Gamma/\Gamma_2 = \Sigma/\Sigma_2 = \mathsf{T}/\mathsf{T}_2 = \Omega/\Omega_2; & \mathsf{T}/\mathsf{T}_3\mathsf{T}_1 = \mathfrak{U}/\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{S}/\mathfrak{S}_3 = \Gamma/\Gamma_3\Gamma_1 \\ \mathfrak{U} = \Gamma/\Gamma_3 = \Sigma/\Sigma_3 = \mathsf{T}/\mathsf{T}_3 = \Omega/\Omega_3; & \Omega/\Omega_1\Omega_2 = \mathfrak{S}/\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{T}/\mathfrak{T}_1 = \Gamma/\Gamma_1\Gamma_2. \end{array}\right. \tag{6}$$

Da jede Operation von Γ_1 mit jeder von Γ_2 vertauschbar ist, so sind auch die Substitutionen von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ miteinander vertauschbar, und dasselbe gilt für die Substitutionen von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ sowie für diejenigen von $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$. Ferner sind die in Σ_1 und die in T_2 enthaltenen Operationen aus ähnlichem Grunde wie diejenigen von Ω_3 (Satz 1) gerade, ihre Komponenten, d. h. die Elemente von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{U}_1$; $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{S}_2$, sind ebenso wie die von $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{T}_3$ reguläre Substitutionen der Klasse n, und die Ordnungen γ_1 und γ_2 dieser Gruppen sind, wie γ_3, Teiler von n [1]).

Nennt man eine Transformation der Form (3) *gerade* oder *ungerade* je nachdem es die Substitution $\mathfrak{stu}$ ist, so besteht Γ entweder nur aus geraden Transformationen, oder die letzteren bilden in Γ einen Normalteiler Γ_0 vom Index 2, welcher Γ_1, Γ_2 und Γ_3 enthält. Ihm entspricht ein ebensolcher Normalteiler $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, der $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ bzw. $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ enthält. Nach (6) ist nämlich z. B. $\mathfrak{S}$ isomorph mit der Faktorgruppe von Γ_1 bezüglich Γ, dem Γ_1 enthaltenden Normalteiler Γ_0 von Γ entspricht also in $\mathfrak{S}$ der Normalteiler $\mathfrak{S}_0$ vom gleichen Index; da aber Γ_0 die direkten Produkte $\Gamma_1\Gamma_2$ und $\Gamma_1\Gamma_3$ enthält, so liegen die entsprechenden Gruppen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ in $\mathfrak{S}_0$.

Geht das Quadrat Q vermöge einer Transformation C der Form (3) in Q' über, so sagen wir, die Quadrate Q und Q' seien *ähnlich*. Ist Γ die Transformationsgruppe von Q, so ist

$$C^{-1}\Gamma C$$

diejenige von Q', die Transformationsgruppen ähnlicher Quadrate sind also konjugiert. Einen Spezialfall der Ähnlichkeit stellt die Verwandtschaft (§ 1) dar, bei welcher die dritte Komponente von C die identische Substitution ist. Verwandte Quadrate besitzen demnach dieselbe Übergangsgruppe.

Wir suchen nun die erzeugenden Substitutionen von Q' aufzustellen. Versteht man allgemein unter $Z(v)$ diejenige Ziffer, welche vermöge der Substitution Z aus v hervorgeht, so steht in der i'-ten Zeile und k''-ten Spalte von Q' die Ziffer

$$\mathfrak{u}(s_i^{-1}(k)) = \mathfrak{u}(t_k(i)).$$

Wird also die i'-te Zeile bzw. k''-te Spalte von Q' durch die Substitution $\tilde{s}_{i'}{}^{1}$ bzw. $\tilde{t}_{k''}$ erzeugt, so gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{s}_{i'}{}^{1} = \begin{pmatrix} v'' \\ \mathfrak{u}(s_i^{-1}(v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{t}(v) \\ \mathfrak{u}(s_i^{-1}(v)) \end{pmatrix} = \mathfrak{t}^{-1} s_i^{-1} \mathfrak{u} \\ \tilde{t}_{k''} = \begin{pmatrix} v' \\ \mathfrak{u}(t_k\ (v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}(v) \\ \mathfrak{u}\,(t_k\ (v)) \end{pmatrix} = \mathfrak{s}^{-1} t_k\ \ \mathfrak{u}\,. \end{array}\right. \tag{7}$$

Soll Q durch C in sich transformiert werden, so müssen demnach die Relationen:

$$s_{i'}^{-1} = \mathfrak{t}^{-1} s_i^{-1} \mathfrak{u} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8 a}$$

$$t_{k''} = \mathfrak{s}^{-1} t_k\ \ \mathfrak{u} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8 b}$$

bestehen. Genügen umgekehrt die drei Komponenten der Transformation C dem einen

[1]) Eine Bestätigung hiervon wird in § 4 durch Satz 6* geliefert.

der beiden Gleichungssysteme (8), so folgt aus (7), daß $Q' = Q$, also C eine Transformation von Q in sich ist. Dann müssen die Komponenten aber auch das andere der Systeme (8) befriedigen.

Ist (3) eine Transformation von Q in sich, so wollen wir zwei Elemente von Q, von denen das eine durch die Umordnung U an die Stelle des andern gebracht wird, ebenfalls als *ähnlich* bezeichnen und in derselben Weise *ähnliche Zeilen* und *ähnliche Spalten* von Q definieren. Es sind also ähnlich die Elemente a_{ik} und $a_{i'k''}$, die Zeilen mit den Nummern i und i', die Spalten mit den Nummern k und k''. Ähnliche Elemente fassen wir zu einer *Klasse* zusammen.

Es gilt dann

Satz 4: Zu ähnlichen Zeilen sowie zu ähnlichen Spalten gehören konjugierte Komplexe und umgekehrt.

Der erste Teil der Behauptung folgt sofort aus den Gleichungen (8), denn die Elimination von t bzw. $\mathfrak{s}$ aus diesen liefert:

$$\text{(9 a)} \qquad \mathfrak{u}^{-1} s_i s_\nu^{-1} \mathfrak{u} = s_{i'} s_{\nu'}^{-1}$$

$$\text{(9 b)} \qquad \mathfrak{u}^{-1} t_k^{-1} t_\nu \mathfrak{u} = t_{k''}^{-1} t_{\nu''} \qquad (i, k, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und dies besagt, daß die Komplexe $\overline{\mathfrak{K}}_i^s$ und $\overline{\mathfrak{K}}_{i'}^s$, sowie $\mathfrak{K}_k^t$ und $\mathfrak{K}_{k''}^t$ konjugiert sind. Transformiert umgekehrt die Substitution $\mathfrak{u}$ etwa den Komplex $\overline{\mathfrak{K}}_p^s$ in $\overline{\mathfrak{K}}_{p'}^s$, so gilt (9 a) für ein festes $i = p$ und alle ν, wodurch zunächst die Substitution

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu' \end{pmatrix}$$

festgelegt ist. Setzt man ferner:

$$s_p^{-1} \mathfrak{u} s_{p'} = \mathfrak{t},$$

so folgt aus (9 a), wenn man dort i durch p und ν durch i ersetzt, das Gleichungssystem (8a), die drei so bestimmten Substitutionen $\mathfrak{s}$, t, $\mathfrak{u}$ sind folglich die Komponenten einer Transformation von Q in sich, und insbesondere sind also die beiden Zeilen mit den Nummern p und p' ähnlich.

Aus diesem Beweis erkennt man, daß sich Satz 4 in folgender Weise vervollständigen läßt:

Satz 4*: Wenn das Quadrat Q die Transformation in sich $C = \mathfrak{s} \mid \mathfrak{t} \mid \mathfrak{u}$ besitzt, so erleiden bei Transformation mit $\mathfrak{u}$ die Komplexe $\overline{\mathfrak{K}}_\nu^s$ und $\mathfrak{K}_\nu^t$ je eine Vertauschung, welche durch Ausübung der Substitution $\mathfrak{s}$ bzw. t auf ihre Indizes zum Ausdruck kommt. Umgekehrt ist jede Substitution, welche $\overline{\mathfrak{K}}_p^s(\mathfrak{K}_q^t)$ in $\overline{\mathfrak{K}}_{p'}^s(\mathfrak{K}_{q''}^t)$ transformiert, dritte Komponente einer Transformation C von Q in sich, deren erste (zweite) Komponente $p(q)$ durch $p'(q'')$ ersetzt.

Die Übergangsgruppe $\mathfrak{U}$ von Q besteht also aus allen Substitutionen, welche die Eigenschaft haben, einen der Zeilen(Spalten)-komplexe in sich oder in einen der andern zu transformieren. Insbesondere enthält sie die Normalisatoren $\overline{\mathfrak{N}}_\nu^s$ der Zeilenkomplexe $\overline{\mathfrak{K}}_\nu^s$ und $\mathfrak{N}_\nu^t$ der Spaltenkomplexe $\mathfrak{K}_\nu^t$ als Untergruppen, sowie deren Durchschnitt $\overline{\mathfrak{D}}^s$ bzw. $\mathfrak{D}^t$ als Normalteiler.

γ_3 ist die bisher mit ω bezeichnete Ordnung der Umordnungsgruppe Ω_3. Nach Satz 4* ist $\mathfrak{U}_1$ bezw. $\mathfrak{U}_2$ in $\overline{\mathfrak{D}}^s$ bzw. $\mathfrak{D}^t$ enthalten. Ist nun $\gamma_3 = 1$, so sind nach Satz 2 die Komplexe $\overline{\mathfrak{K}}_\nu^s$ alle verschieden, zu einer in $\overline{\mathfrak{D}}^s$ enthaltenen Übergangssubstitution gehört also dann nach (9 a) als erste Komponente die Substitution $\mathfrak{s} = \mathfrak{e}$, d. h. es ist $\overline{\mathfrak{D}}^s \equiv \mathfrak{U}_1$, und

ebenso findet man $\mathfrak{D}^t \equiv \mathfrak{U}_2$. In diesem Fall haben $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ außer dem Einheitselement kein Element gemein, und $\mathfrak{U}$ enthält somit das direkte Produkt $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$.

In den Gleichungen (7) und den daran anschließenden Überlegungen tritt die vorher beobachtete Symmetrie in bezug auf die drei Komponenten einer Transformation des Quadrats Q in sich nicht mehr zutage. Sie erscheint jedoch wieder, sobald man neben Q noch gewisse andere eng damit verknüpfte Quadrate zur Betrachtung heranzieht, was im folgenden geschehen soll.

§ 4. Koordinierte Quadrate.

Zunächst wollen wir in einem Quadrat Q neben den in § 2 definierten Systemen s_i und t_i noch ein weiteres System von n Substitutionen

$$u_i = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu_i \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

durch die Forderungen

$$a_{\nu_i \nu} = i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

einführen. Auch durch dieses System ist Q vollständig bestimmt. Die drei Systeme von je n Substitutionen s_i, t_i, u_i nennen wir dann die *Fundamentalsysteme* des Quadrats Q. Bedeutet wieder $Z(i)$ diejenige Ziffer, in welche i vermöge der Substitution Z übergeführt wird, so bestehen zwischen den Substitutionen der drei Fundamentalsysteme folgende *Fundamentalrelationen*:

$$(10) \qquad \begin{cases} s_i = \begin{pmatrix} \nu \\ u_\nu^{-1}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_\nu(i) \\ \nu \end{pmatrix} \\ t_i = \begin{pmatrix} \nu \\ s_\nu^{-1}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\nu(i) \\ \nu \end{pmatrix} \\ u_i = \begin{pmatrix} \nu \\ t_\nu^{-1}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_\nu(i) \\ \nu \end{pmatrix}, \end{cases}$$

welche unmittelbar aus Figur 1 abgelesen werden können.

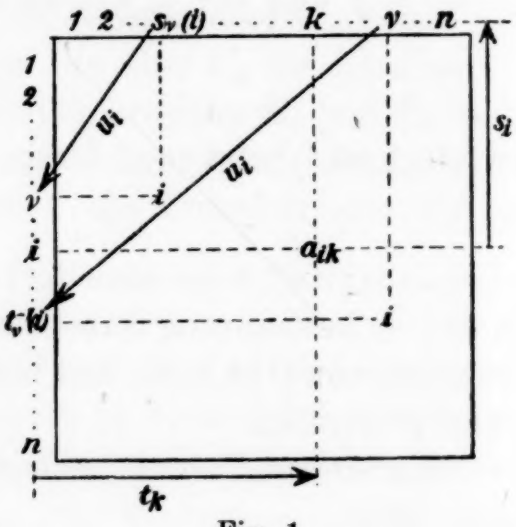

Fig. 1.

Nun definieren wir drei Operationen, deren jede das Quadrat Q in ein neues Quadrat überführt. Die erste Operation R_1 besteht darin, daß man die zeilenerzeugenden Substitutionen s_i^{-1} von Q invertiert und die so entstandenen Substitutionen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ als Erzeugende für die Zeilen des neuen Quadrats Q_1 verwendet [1]). Q_1 heiße das zu Q *zeileninverse* Quadrat. In entsprechender Weise verwandelt R_2 das Quadrat Q in das zu Q *spalteninverse* Quadrat Q_2, dessen Spalten durch $t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_n^{-1}$ erzeugt werden. Schließlich bedeute R_3 die Umklappung von Q um seine Hauptdiagonale. Das dadurch entstehende Quadrat Q_3 ist das zu Q *symmetrische.*

---

[1]) In der speziellen Form, in welcher sich die Operation R_1 bei Anwendung auf ein reduziertes Quadrat darbietet, tritt sie schon bei *M. Frolov* in seinen Recherches sur les permutations carrées (Journ. de Math. spéc. (3) 4 (1890), p. 8—11; 25—30) auf. Frolov führt im reduzierten Quadrat, das er „type" nennt, die Substitutionen des ersten Zeilenkomplexes ein und konstruiert, indem er aus ihren Inversen den ersten Zeilenkomplex eines neuen reduzierten Quadrats bildet, den „type opposé" zu dem gegebenen. Die hierbei angewandte Operation ist die Kombination von R_1 mit einer passenden Zeilenvertauschung. An weiteren Operationen, welche gestatten, aus einem reduzierten Quadrat andere herzuleiten, verwendet er außerdem die Operation R_3, welche zum „type inverse" führt, und ferner Umordnungen, vermöge deren immer n „types congénères" zusammengehören. Neben anderen unrichtigen Angaben enthält diese Arbeit die falsche Behauptung, daß soweit sie nicht Gruppentafeln sind, alle reduzierten Quadrate einer bestimmten Ordnung durch wiederholte Anwendung der genannten Operationen aus einem derselben gewonnen werden können.

Die Fundamentalsysteme der drei Quadrate Q_r $(r = 1, 2, 3)$ lassen sich leicht angeben. Ersetzt man nämlich s_i^{-1} durch s_i, so tritt nach (10) gleichzeitig u_i^{-1} an die Stelle von t_i und t_i^{-1} an die Stelle von u_i. Q_1 hat folglich die Fundamentalsysteme $s_i^{-1}, u_i^{-1}, t_i^{-1}$. Ebenso findet man für die Fundamentalsysteme von Q_2: $u_i^{-1}, t_i^{-1}, s_i^{-1}$ und für diejenigen von Q_3: $t_i^{-1}, s_i^{-1}, u_i^{-1}$. Die Wirkung der Operation $R_r (r = 1, 2, 3)$ auf die drei Fundamentalsysteme von Q kann also durch die symbolische Operation Z_r ausgedrückt werden, wobei

$$(11) \qquad \begin{cases} Z_1 = (s\,s^{-1})(t\,u^{-1})(u\,t^{-1}) \\ Z_2 = (s\,u^{-1})(t\,t^{-1})(u\,s^{-1}) \\ Z_3 = (s\,t^{-1})(t\,s^{-1})(u\,u^{-1}) \end{cases}$$

gesetzt ist.

Daraus erkennt man, daß die Anwendung von R_3 auf Q_1 zu einem Quadrat Q_{13} mit den Fundamentalsystemen u_i, s_i, t_i führt, daß also dabei der Operation $R_1 R_3$ die zyklische Vertauschung $Z_3 Z_1 = (s\,u\,t)$ entspricht. Hieraus folgt aber, daß man bei dreimaliger Anwendung von $R_1 R_3$ zum Ausgangsquadrat zurückgelangt, d. h.

$$(12) \qquad (R_1 R_3)^3 = E,$$

wo E eine Operation bedeutet, welche jedes Qudrat in sich überführt und hier die Rolle der Einheitsoperation spielt. Unterwirft man ferner Q_2 der Operation R_3, so entsteht das Quadrat Q_{23} mit den Fundamentalsystemen t_i, u_i, s_i, der Operation $R_2 R_3$ entspricht somit hierbei die Vertauschung $Z_3 Z_2 = (s\,t\,u)$.

Das Quadrat Q_{13} entsteht aus Q auch vermöge der Operation $R_2 R_1$. Daraus folgt:

$$R_1 R_3 = R_2 R_1,$$

oder da

$$(13) \qquad R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = E$$

ist, auch:

$$(14) \qquad R_2 = R_1 R_3 R_1.$$

Aus den Gleichungen (12) bis (14) ergibt sich

Satz 5: Die drei Operationen R_1, R_2, R_3 erzeugen eine mit der symmetrischen Gruppe vom Grade 3 isomorphe Gruppe $\mathfrak{R}$, durch deren Operationen die sechs Quadrate Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_{13} und Q_{23} miteinander verbunden sind.

Wir nennen diese sechs Quadrate *koordiniert*. Ihre erzeugenden Substitutionen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	Q	Q_{23}	Q_{13}	Q_1	Q_3	Q_2
Zeilen	s_i^{-1}	t_i^{-1}	u_i^{-1}	s_i	t_i	u_i
Spalten	t_i	u_i	s_i	u_i^{-1}	s_i^{-1}	t_i^{-1}

Die Anzahl der verschiedenen koordinierten Quadrate reduziert sich unter Umständen, nämlich

a) auf drei, wenn eines derselben symmetrisch ist, oder, was dasselbe bedeutet, wenn eines ein System von Erzeugenden zweiter Ordnung besitzt.

b) auf zwei, wenn für $i = 1, 2, \ldots, n : s_i = t_i$ ist, was $s_i = u_i$ zur Folge hat [1]).

c) auf eins, wenn die Voraussetzungen für a) und b) zugleich erfüllt sind. In diesem Fall ist Q symmetrisch und besitzt nur Erzeugende zweiter Ordnung [2]).

[1]) Daß dieser Fall auch möglich ist, läßt sich durch einfache Beispiele belegen (vgl. III, § 11, $n = 5$; IIa).

[2]) Beispiel: Gruppentafel der Vierergruppe.

Jede Operation der Gruppe $\mathfrak{R}$ hat die Eigenschaft, mit der Gesamtheit aller Transformationen vertauschbar zu sein. Bezüglich R_3 liegt dies auf der Hand, denn es gilt, wenn $C = \mathfrak{s}|\mathfrak{t}|\mathfrak{u}$ irgendeine Transformation ist, offenbar:

$$R_3 C R_3 = \mathfrak{t}|\mathfrak{s}|\mathfrak{u}. \tag{15}$$

Für R_1 ergibt sich die analoge Beziehung:

$$R_1 C R_1 = \mathfrak{s}|\mathfrak{u}|\mathfrak{t}. \tag{16}$$

Unterwirft man nämlich Q zuerst der Operation R_1 und dann der Transformation C, so entsteht ein Quadrat, dessen i'-te Zeile gemäß (7) durch $\mathfrak{t}^{-1} s_i \mathfrak{u}$ erzeugt wird. Die i'-te Zeile des Quadrats, das hieraus durch abermalige Anwendung von R_1 hervorgeht, wird dann durch $\mathfrak{u}^{-1} s_i^{-1} \mathfrak{t}$ erzeugt. Genau dieselbe Substitution erzeugt aber die i'-te Zeile desjenigen Quadrats, welches vermöge $\mathfrak{s}|\mathfrak{u}|\mathfrak{t}$ aus Q entsteht.

Wegen (14) folgt aus (15) und (16) für R_2:

$$R_2 C R_2 = \mathfrak{u}|\mathfrak{t}|\mathfrak{s}. \tag{17}$$

Transformiert man also irgendeine Transformation C mit R_r, so bleibt ihre r-te Komponente ungeändert, während die andern beiden sich vertauschen. Die allgemeine Transformationsgruppe $\mathfrak{C}$ läßt sich somit durch Hinzunahme der Operationen von $\mathfrak{R}$ zu einer Gruppe $\mathfrak{C}'$ der sechsfachen Ordnung erweitern.

Ist nun V diejenige Operation von $\mathfrak{R}$, welche Q in Q_v überführt, und ist C eine Transformation von Q in sich, so transformiert die Operation $V^{-1}CV$ das Quadrat Q_v in sich. Hieraus folgt

Satz 6: Nimmt man in allen Operationen der Transformationsgruppe Γ eines Quadrats Q ein und dieselbe Vertauschung der Komponenten vor, so geht sie in die Transformationsgruppe eines mit Q koordinierten Quadrats über.

Wir gehen nun von Q zu Q_{23} über vermöge der Operation $R_2 R_3$. Wie oben festgestellt wurde, ist hierzu in den Fundamentalsystemen von Q die zyklische Vertauschung (stu) vorzunehmen. Wegen (15) und (17) hat man gleichzeitig in den Operationen von Γ die Vertauschung $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{u})$ auszuführen, um zur Transformationsgruppe von Q_{23} zu gelangen. Neben den früher aufgestellten Relationen (8) müssen somit auch die daraus vermöge der Vertauschung $(\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{u})(stu)$ hervorgehenden bestehen. Damit gelingt es, jenen Relationen die folgende symmetrische Gestalt zu geben:

$$\mathfrak{s} = u_\nu^{-1} \mathfrak{t} u_{\nu'''}; \quad \mathfrak{t} = s_\nu^{-1} \mathfrak{u} s_{\nu'}; \quad \mathfrak{u} = t_\nu^{-1} \mathfrak{s} t_{\nu''}. \tag{18}$$

Für die Operationen von Γ_1 bzw. Γ_2 bzw. Γ_3 erhält man hieraus speziell:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{e}; \quad \mathfrak{t} = u_\nu u_{\nu'''}^{-1} = s_\nu^{-1} \mathfrak{u} s_\nu; \quad \mathfrak{u} = t_\nu^{-1} t_{\nu''} \tag{18, 1}$$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{e}; \quad \mathfrak{u} = s_\nu s_{\nu'}^{-1} = t_\nu^{-1} \mathfrak{s} t_\nu; \quad \mathfrak{s} = u_\nu^{-1} u_{\nu'''} \tag{18, 2}$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{e}; \quad \mathfrak{s} = t_\nu t_{\nu''}^{-1} = u_\nu^{-1} \mathfrak{t} u_\nu; \quad \mathfrak{t} = s_\nu^{-1} s_{\nu'}. \tag{18, 3}$$

Auch den Gleichungen (7) können wir jetzt die symmetrische Gestalt:

$$\tilde{s}_{\nu'} = \mathfrak{u}^{-1} s_\nu \mathfrak{t}; \quad \tilde{t}_{\nu''} = \mathfrak{s}^{-1} t_\nu \mathfrak{u}; \quad \tilde{u}_{\nu'''} = \mathfrak{t}^{-1} u_\nu \mathfrak{s} \tag{19}$$

geben. Ferner ergeben sich vermöge derselben zyklischen Vertauschung aus den Gleichungen (9) die entsprechenden Relationen für $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$. Auch alle andern Aussagen, insbesondere Satz 4* und die anschließenden Bemerkungen bleiben bei Anwendung dieser Vertauschung richtig, wenn man nur $(\Sigma T \Omega)$ und $(\mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{U})$ sowie die an diese Buchstaben angehängten Indizes (1 2 3) und, wo von der r-ten Komponente die Rede ist, auch die Ziffer r daran teilnehmen läßt. Die in (2) eingeführte Bezeichnung der Komplexe ist dabei in folgender Weise zu ergänzen:

$$(20)\quad \left.\begin{array}{lll} \mathfrak{K}_i^s = (s_i^{-1} s_\nu); & \mathfrak{K}_i^t = (t_i^{-1} t_\nu); & \mathfrak{K}_i^u = (u_i^{-1} u_\nu) \\ \overline{\mathfrak{K}}_i^s = (s_i s_\nu^{-1}); & \overline{\mathfrak{K}}_i^t = (t_i t_\nu^{-1}); & \overline{\mathfrak{K}}_i^u = (u_i u_\nu^{-1}) \end{array}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Zur Bezeichnung der Normalisatoren dieser Komplexe ersetzen wir, wie oben nach Satz 4*, den Buchstaben $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{N}$. Zwischen diesen bestehen nebenbei die leicht zu beweisenden Beziehungen:

$$(21)\qquad \mathfrak{N}_i^s = s_i^{-1}\,\overline{\mathfrak{N}}_i^s\, s_i; \quad \mathfrak{N}_i^t = t_i^{-1}\,\overline{\mathfrak{N}}_i^t\, t_i; \quad \mathfrak{N}_i^u = u_i^{-1}\,\overline{\mathfrak{N}}_i^u\, u_i\,.$$

Die genannte Vertauschung entspricht dem Übergang von Q zu Q_{23}. Mit $V = R_1$ gelangt man ebenso zu der Vertauschung $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})(s s^{-1})(t u^{-1})$, welche dem Übergang von Q zu Q_1 entspricht. Ihre Anwendung auf (18) ergibt jedoch nichts Neues. Wir können die verschiedenen Vertauschungsmöglichkeiten zusammenfassen in dem

Satz 6*: Jede Aussage über die Transformationen eines allgemeinen Quadrats in sich behält ihre Richtigkeit gegenüber den Operationen der durch

$$\zeta = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})\,(s\,t\,u)\,(\mathfrak{S}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U})\,(\Sigma\,\mathsf{T}\,\Omega)\,(1\,2\,3)$$
$$\zeta_1 = (\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})\,(s s^{-1})\,(t u^{-1})\,(\mathfrak{T}\,\mathfrak{U})\,(\mathsf{T}\,\Omega)\,(2\,3)$$

erzeugten Gruppe.

Über die Untergruppen Γ_r $(r = 1, 2, 3)$ waren oben schon [1]) einige vorläufige Bemerkungen gemacht worden, welche nun durch die Zulässigkeit der Vertauschung ζ ihre Bestätigung gefunden haben. Auf Grund des Satzes 6* dürfen wir uns bei der weiteren Untersuchung dieser Gruppen auf eine derselben, etwa auf Γ_1 beschränken.

Aus (9 a) folgt zunächst, daß jede Substitution von $\mathfrak{U}_1$ mit jeder Zeilensubstitution vertauschbar ist. Unterwirft man andererseits die Elemente des Quadrats Q einer Substitution $\mathfrak{u}$, welche diese Eigenschaft besitzt [2]), so kann das entstandene Quadrat offensichtlich durch bloße Spaltenvertauschung in das ursprüngliche zurückverwandelt werden, d. h. $\mathfrak{u}$ liegt in $\mathfrak{U}_1$.

Aus (18, 1) geht aber auch hervor, daß jede Substitution von $\mathfrak{U}_1$ im Durchschnitt aller Spaltenkomplexe enthalten ist. Hat umgekehrt $\mathfrak{u}$ diese Eigenschaft, so gilt:

$$\mathfrak{u} = t_\nu^{-1} t_{\bar\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Folglich ist für irgendein festes q und alle ν:

$$\mathfrak{u}^{-1} t_q^{-1} t_\nu \mathfrak{u} = t_{\bar q}^{-1} t_{\bar\nu}.$$

Nach Satz 4* existiert also eine Transformation $\mathfrak{s}|\mathfrak{t}|\mathfrak{u}$ von Q in sich, wobei $q'' = \bar q$ ist. Aus der dritten der Gleichungen (18), denen die Komponenten dieser Transformation genügen müssen, folgt aber dann mit $\nu = q$:

$$\mathfrak{u} = t_q^{-1}\,\mathfrak{s}\,t_{\bar q},$$

also $\mathfrak{s} = \mathfrak{e}$, und demnach liegt $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}_1$.

Unter Verwendung der früheren Bemerkungen und der Vertauschung ζ_1 können wir also sagen:

Satz 7: Die Gruppe $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{T}_1)$ ist mit dem Durchschnitt aller Komplexe $\mathfrak{K}_\nu^t\,(\overline{\mathfrak{K}}_\nu^u)$ sowie mit der Gesamtheit der mit jeder Substitution $s_i s_k^{-1}$ $(s_i^{-1} s_k)$ verstauschbaren Substitutionen identisch, sie enthält nur reguläre Substitutionen der Klasse n, und ihre Ordnung γ_1 ist Teiler von n.

Aus dem zweiten Gleichungssystem (18, 1) findet man durch einfache Umformung:

$$\mathfrak{t}^{-1} u_i u_\nu^{-1}\,\mathfrak{t} = u_{i'''} u_{\nu'''}^{-1}; \quad u_i^{-1} u_\nu = u_{i'''}^{-1} u_{\nu'''}; \qquad (i, \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) § 3 nach Gl. (6).

[2]) Hierfür reicht hin, daß sie mit jeder Substitution eines Zeilenkomplexes vertauschbar ist.

Da in der Gruppe $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{T}_1)$ je γ_1 der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ ein transitives Teilsystem bilden, so zerfällt die Gesamtheit der Komplexe $\overline{\mathfrak{K}}_\nu^u(\mathfrak{K}_\nu^l)$ in je γ_1 konjugierte, und die der Komplexe $\mathfrak{K}_\nu^u(\overline{\mathfrak{K}}_\nu^l)$ in je γ_1 gleiche.

In Satz 7 ist folgendes Nebenresultat enthalten:

Satz 7 a: Der Durchschnitt aller Spaltenkomplexe eines Quadrats stimmt überein mit der Gesamtheit der mit jeder Zeilensubstitution desselben vertauschbaren Substitutionen.

Wir betrachten noch speziell den Fall $\gamma_1 = n$. Hier stimmen die Komplexe $\mathfrak{K}_\nu^l$, da in jedem von ihnen die Gruppe $\mathfrak{U}_1$ der Ordnung n enthalten ist, alle mit $\mathfrak{U}_1$ überein, nach Satz 2 sind also alle Spalten verwandt, und folglich hat die Umordnungsgruppe Ω_3 die Ordnung $\gamma_3 = n$. Dann sind aber auch alle Zeilen verwandt, also wiederum nach Satz 2 alle Zeilenkomplexe einander gleich, und demnach hat ihr Durchschnitt $\mathfrak{U}_2$ die Ordnung $\gamma_2 = n$. Es gilt somit

Satz 7 b: Ist eine der Zahlen $\gamma_r (r = 1, 2, 3)$ gleich n, so haben auch die beiden andern diesen Wert.

Der innere Grund für die Symmetrie bezüglich der drei Komponenten der Transformationen eines Quadrats Q in sich und für die Zusammengehörigkeit der sechs koordinierten Quadrate erhellt aus folgender *räumlichen Deutung*:

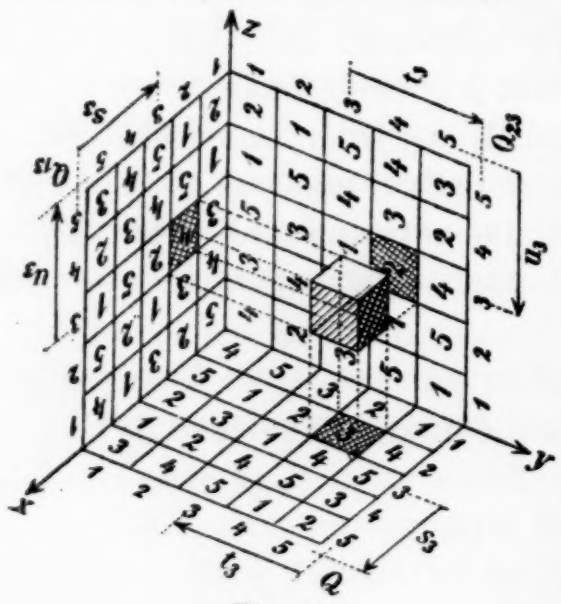

Fig. 2.

Man lege das Quadrat Q horizontal, bezeichne die von seinem Ursprung ausgehende Kante parallel der Spaltenrichtung als positive x-Achse, parallel der Zeilenrichtung als positive y-Achse. Senkrecht dazu nach oben sei die positive z-Achse errichtet. Sodann konstruiere man über Q als Grundfläche den Würfel und teile ihn in n^3 gleichgroße Teilwürfel auf. Die n horizontalen Parallelschichten werden in Richtung der positiven z-Achse numeriert und dann werde über jedem Feld von Q, das die Ziffer ν trägt, der der ν-ten Schicht angehörige Teilwürfel markiert (Figur 2).

Der so konstruierte Würfel kann als räumliches Bild des Quadrats angesehen werden, und umgekehrt ist das Quadrat eine Art kotierter Projektion der n^2 markierten Teilwürfel. Es liegt nun nahe, die ebenso hergestellten Projektionen auf die andern beiden Koordinatenebenen zu betrachten. Auch sie sind lateinische Quadrate, und wenn man ihren Ursprung dort annimmt, wo der Ursprung des Koordinatensystems liegt, so sind, wie man leicht erkennt, die drei Projektionen des Würfels zusammen mit ihren rückwärtigen Ansichten gerade sechs koordinierte Quadrate. In der Tat ist z. B. Q_3 die Ansicht von Q von der Seite der negativen z-Achse her; Q_1 liegt in der xz-Ebene und ist von der negativen y-Achse aus zu betrachten, während der Anblick von der positiven y-Achse her das Quadrat Q_{13} ergibt usw.

Eine *Transformation des Würfels* setzt sich nun aus drei Operationen zusammen, deren jede eine Vertauschung von n Parallelschichten ist und wie bei den Umordnungen des Quadrats durch eine Substitution in den n Ziffern $1, 2, \ldots, n$ angegeben werden kann. Eine solche Transformation hat also die Form:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \nu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu''' \end{pmatrix},$$

wobei festgesetzt sei, daß die drei Substitutionen sich in der angegebenen Reihenfolge auf die Vertauschungen in Richtung der x-, der y- und der z-Achse beziehen sollen. Unterscheiden sich die markierten Teilwürfel untereinander nicht, sondern nur von den nichtmarkierten, so kann man *Transformationen des Würfels in sich* als solche definieren, welche ihn in einen kongruenten mit ihm zur Deckung kommenden verwandeln. (Zwei markierte Teilwürfel, von denen der eine bei einer solchen Operation an den Platz des andern gelangt, wollen wir *ähnlich* nennen.) Diese Transformationen des Würfels in sich stimmen dann in der obigen Schreibweise offenbar überein mit den Transformationen des Quadrats Q in sich, und es leuchtet jetzt unmittelbar ein, daß man aus ihnen durch Vertauschung der Komponenten die Transformationen eines der koordinierten Quadrate in sich bekommt, z. B. durch zyklische Vertauschung diejenigen von Q_{23} und Q_{13}.

§ 5. Erweiterungen [1]).

Die Operation X verwandelt ein Quadrat Q in sein symmetrisches, Q_x, und ist mit der Gesamtheit aller Transformationen vertauschbar. Die Gleichung (15), welche die letztere Eigenschaft ausdrückt, geht mit

$$C' = \mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{u}$$

über in:

$$CX = XC'.$$

Unter Umständen gibt es für ein spezielles Quadrat Q auch noch eine Transformation

$$C^* = \mathfrak{s}^*\,|\,\mathfrak{t}^*\,|\,\mathfrak{u}^*,$$

welche ebenfalls die Verwandlung in Q_x bewerkstelligt. Dann kommt dieselbe Eigenschaft auch jedem der mit Q verwandten Quadrate zu. Geht nämlich Q' aus Q vermöge der Umordnung U hervor, und setzt man $U = \mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{t}$, so wird Q' durch die Operation

$$U^{-1}C^*XU = U^{-1}C^*U'X$$

in sich selbst, also durch die Transformation

$$(22) \qquad (C^*)' = U^{-1}C^*U' = \mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}^*\,\mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{t}^*\mathfrak{s}|\,\mathfrak{u}^* = \mathfrak{s}^{*\prime}\,|\,\mathfrak{t}^{*\prime}|\,\mathfrak{u}^*$$

in das zu Q' symmetrische Quadrat Q'_x übergeführt.

Die Operation C^*X, welche also Q in sich überführt, nennen wir eine *uneigentliche Transformation von Q in sich*. Zu dieser Kategorie gehören sicher auch alle Operationen der Form CC^*X, wenn C in der Transformationsgruppe Γ von Q enthalten ist, und zwar gibt es keine weiteren, denn es gilt

Satz 8: Gibt es uneigentliche Transformationen eines Quadrats Q in sich, so bilden sie zusammen mit den eigentlichen die *erweiterte Transformationsgruppe* Γ^* von Q, welche Γ als Normalteiler vom Index 2 enthält.

Zunächst ist nämlich jede uneigentliche Transformation von Q in sich in dem Komplex ΓC^*X enthalten, denn, wenn C_1^* das Quadrat Q in Q_x überführt, so liegt

$$C_1^*(C^*)^{-1} = C$$

in Γ, und es folgt:

$$C_1^*X = CC^*X.$$

Ferner ist auch

$$(23) \qquad (C^*X)^2 = C^*XC^*X = C^*(C^*)' = \mathfrak{s}^*\,\mathfrak{t}^*\,|\,\mathfrak{t}^*\,\mathfrak{s}^*|\,\mathfrak{u}^{*2}$$

---

[1]) Im folgenden spielt die Operation R_3 eine ausgezeichnete Rolle. Zur Vereinfachung der Bezeichnung ist statt R_3 das Zeichen X gesetzt.

eine Transformation aus Γ. Schließlich ist C^*X mit Γ vertauschbar, denn für die Transformationsgruppe Γ_x von Q_x gilt:

$$\Gamma_x = X\Gamma X = (C^*)^{-1}\Gamma C^*,$$

woraus

$$\Gamma = (C^*X)^{-1}\Gamma(C^*X) \tag{24}$$

folgt.

Aus (24) geht hervor, daß $\mathfrak{s}^*$ die Gruppe $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}^*$ die Gruppe $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{u}^*$ die Gruppe $\mathfrak{U}$ in sich transformiert. Ferner folgt aus (23), daß $\mathfrak{u}^{*2}$ in der Übergangsgruppe $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Demnach gilt, wenn man $\mathfrak{u}^*$ eine *uneigentliche Übergangssubstitution* nennt, der

Satz 9: Gibt es zu einem Quadrat Q eine uneigentliche Übergangssubstitution, und ist diese nicht schon in der Übergangsgruppe $\mathfrak{U}$ enthalten, so bilden die eigentlichen und uneigentlichen Übergangssubstitutionen von Q die *erweiterte Übergangsgruppe* $\mathfrak{U}^*$, welche $\mathfrak{U}$ als Normalteiler vom Index 2 enthält.

Wie hier schon angedeutet ist, kann der Fall eintreten, daß die uneigentliche Übergangssubstitution $\mathfrak{u}^*$ in $\mathfrak{U}$ enthalten ist, daß also ein Element von $\mathfrak{U}$ zugleich den Charakter einer uneigentlichen Übergangssubstitution besitzt. Dieselbe Eigenschaft kommt dann aber jedem andern Element von $\mathfrak{U}$ zu und speziell dem Element $\mathfrak{e}$. Dieser Fall tritt also dann und nur dann ein, wenn es eine Umordnung

$$U^* = \mathfrak{s}^*|\mathfrak{t}^*$$

gibt, welche Q in Q_x verwandelt. Wegen (22) hat dann auch jedes der mit Q verwandten Quadrate diese Eigenschaft. Die Komponenten einer solchen Umordnung sind zueinander invers, denn wenn man

$$\mathfrak{s}^* = \binom{\nu}{\nu'}; \qquad \mathfrak{t}^* = \binom{\nu}{\nu''}$$

setzt, und a_{ik} wieder das Element der i-ten Zeile und k-ten Spalte von Q bedeutet, so muß gelten:

$$a_{ik} = a_{k''i'} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus $i' = k$ folgt aber hiernach stets $k'' = i$, also ist

$$\mathfrak{s}^*\,\mathfrak{t}^* = \mathfrak{e}.$$

Dieser Fall kann auch dadurch charakterisiert werden, daß sich unter den Verwandten von Q ein zu sich selbst symmetrisches Quadrat befindet. Mit

$$\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}^*; \qquad \mathfrak{t}^* = (\mathfrak{s}^*)^{-1}; \qquad \mathfrak{u}^* = \mathfrak{e}$$

folgt nämlich aus (22):

$$(C^*)' = \mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}^*\,\mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{t}^{-1}(\mathfrak{s}^*)^{-1}\mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{e},$$

und diese Transformation geht mit $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^*$; $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}$ in die identische über, das heißt aber, das Quadrat Q', das vermöge der Umordnung $U = \mathfrak{s}^*|\mathfrak{e}$ aus Q entsteht, ist symmetrisch. Verwandelt umgekehrt die Umordnung U das Quadrat Q in ein zu sich selbst symmetrisches, so wird Q durch die Operation

$$UXU^{-1} = U(U^{-1})'X = U^*X$$

in sich, also durch U^* in Q_x übergeführt.

Die Operation U^*X ist nun, wie aus (24) unmittelbar hervorgeht, mit der Umordnungsgruppe Ω_3 vertauschbar. Ferner folgt aus (23), da die Komponenten von U^* zueinander invers sind:

$$(U^*X)^2 = \mathfrak{e}|\mathfrak{e}.$$

Diese Operation ist also von der zweiten Ordnung. Wir nennen sie eine *uneigentliche Umordnung von Q in sich*. Jede andere Operation dieser Art ist dann in der Form U_3U^*X darstellbar, wo U_3 in Ω_3 liegt, und ist ebenfalls von der zweiten Ordnung, weil auch U_3U^* die Eigenschaft hat, Q in Q_x zu verwandeln, und darum inverse Komponenten besitzt.

Wir fassen die letzten Ergebnisse zusammen in dem

Satz 10: Der Fall, daß die Übergangsgruppe $\mathfrak{U}$ eines Quadrats Q trotz der Existenz uneigentlicher Transformationen von Q in sich durch Hinzunahme der uneigentlichen Übergangssubstitutionen keine Erweiterung erfährt, ist durch jede der beiden folgenden Eigenschaften charakterisiert:

1. Es gibt eine Umordnung, welche Q in Q_x überführt. (Dieselbe hat stets inverse Komponenten.)
2. Eines der mit Q verwandten Quadrate ist zu sich selbst symmetrisch.

In diesem Fall bilden die eigentlichen und uneigentlichen Umordnungen von Q in sich die *erweiterte Umordnungsgruppe* Ω_3^* von Q, welche Ω_3 als Normalteiler vom Index 2 und außer den Operationen von Ω_3 nur solche der zweiten Ordnung enthält.

Ist speziell Q selbst symmetrisch, so ist jede uneigentliche Umordnung von Q in sich von der Form U_3X, wo U_3 in Ω_3 liegt, und jede Operation von Ω_3 hat darum inverse Komponenten.

Auf eine besondere Art von uneigentlichen Übergangssubstitutionen soll hier noch etwas näher eingegangen werden. Wir bezeichnen als *Symmetriesubstitution* des Quadrates Q eine Substitution, welche eines der mit Q verwandten Quadrate Q' in sein symmetrisches, Q'_x, überführt. Dann erkennt man wieder leicht mit Hilfe der Gleichungen (22) und (23) die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

1. Es gibt eine uneigentliche Transformation zweiter Ordnung von Q in sich [1]).
2. Q besitzt eine Symmetriesubstitution.

Zugleich ergibt sich, daß die ersten beiden Komponenten der in 1. genannten Transformation zueinander invers sind, sowie daß die dritte Komponente Symmetriesubstitution und, wenn nicht die identische, von der zweiten Ordnung ist.

Ist die Symmetriesubstitution gleich der identischen, so hat man den Fall des Satzes 10.

Aus (22) geht hervor, daß eine Symmetriesubstitution mit dem Quadrat Q' auch jedes andere Quadrat in sein symmetrisches transformiert, welches aus Q' vermöge einer Umordnung mit zwei gleichen Komponenten entsteht.

Es sei nun $\mathfrak{x}$ eine Symmetriesubstitution von Q. Dann enthält Γ^* eine Operation der zweiten Ordnung $(U\mathfrak{x})X$, wo U eine Umordnung bedeutet. Ist $\mathfrak{u}^*$ in $\mathfrak{U}^*$, so enthält Γ^* auch eine Operation C^*X, wobei $\mathfrak{u}^*$ in C^* die dritte Komponente ist, und folglich auch die uneigentliche Transformation von Q in sich:

$$(C^*X)^{-1}(U\mathfrak{x})X(C^*X) = C^*X,$$

welche ebenfalls von der zweiten Ordnung ist. Die dritte Komponente von C_1^*, d. h. $(\mathfrak{u}^*)^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{u}^*$, ist also wieder eine Symmetriesubstitution. Beachtet man noch, daß jede eigentliche Übergangssubstitution als Produkt von zwei uneigentlichen angesehen werden kann und daß umgekehrt jedes solche Produkt in $\mathfrak{U}$ enthalten ist, so folgt:

---

[1]) Stattdessen könnte man auch sagen: Es gibt eine uneigentliche Transformation von Q in sich, deren erste beiden Komponenten zueinander invers sind. Denn jede solche ist von der zweiten Ordnung, da aus (23) mit $\mathfrak{s}^*\mathfrak{t}^* = \mathfrak{e}$ sofort $\mathfrak{u}^{*2} = \mathfrak{e}$ folgt.

Satz 11: Ein Substitution $\mathfrak{x}$ ist dann und nur dann Symmetriesubstitution des Quadrates Q, wenn es eine uneigentliche Transformation von Q in sich von der Form

$$(\mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{s}^{-1}|\,\mathfrak{x})X$$

gibt. Der in der erweiterten Übergangsgruppe $\mathfrak{U}^*$ von Q enthaltene Komplex der Symmetriesubstitutionen ist mit jedem Element von $\mathfrak{U}^*$ vertauschbar. Der Komplex der Produkte von je zwei Symmetriesubstitutionen ist in $\mathfrak{U}$ enthalten (und mit jedem Element von $\mathfrak{U}^*$ vertauschbar).

Ist das mit Q verwandte Quadrat Q', das durch die Symmetriesubstitution $\mathfrak{x}_k$ in sein symmetrisches verwandelt wird, k-normiert[1]), so nennen wir $\mathfrak{x}_k$ eine zu Q gehörige *Normalsubstitution*. Die Anzahl der Normalsubstitutionen von Q ist höchstens n. Denn einerseits führt eine Normalsubstitution $\mathfrak{x}_k$ mit *einem* k-normierten Quadrat $Q^{(k)}$ auch alle andern damit verwandten k-normierten Quadrate in ihre symmetrischen über, weil diese alle aus $Q^{(k)}$ durch Umordnungen mit gleichen Komponenten gewonnen werden, und andererseits kann es nur *eine* Substitution geben, welche ein bestimmtes Quadrat in sein symmetrisches verwandelt. Wir können also sagen, $\mathfrak{x}_k$ ist die zur Ziffer k gehörige Normalsubstitution von Q.

Eines der k-normierten Quadrate, $Q^{(k)}$, entsteht, wie man mit Hilfe von (10) und (19) leicht nachweist, aus Q vermöge der Umordnung $U = u_k^{-1}|\mathfrak{e}$ [2]). Aus (22) folgt dann: Wenn $\mathfrak{x}_k$ das Quadrat $Q^{(k)}$ in sein symmetrisches transformiert, so führt die Transformation $C_k^* = u_k^{-1}|\,u_k\,|\,\mathfrak{x}_k$ das Quadrat Q in Q_x über und umgekehrt. Transformiert man nun die Operation $C_k^* X$ mit irgendeiner uneigentlichen Transformation von Q in sich:

$$C^*X = (\mathfrak{s}^*\,|\,\mathfrak{t}^*\,|\,\mathfrak{u}^*)X = \left(\binom{\nu}{\nu'}\left|\binom{\nu}{\nu''}\right|\binom{\nu}{\nu'''}\right)X,$$

so ergibt sich die ebenfalls in Γ^* enthaltene Operation

$$\left((\mathfrak{t}^*)^{-1}\,u_k\,\mathfrak{s}^*\,|\,(\mathfrak{s}^*)^{-1}\,u_k^{-1}\,\mathfrak{t}^*|\,(\mathfrak{u}^*)^{-1}\,\mathfrak{x}_k\,\mathfrak{u}^*\right)X.$$

Es ist aber unschwer zu zeigen, daß die Komponenten von C^* die den Gleichungen (18) entsprechenden Relationen

$$(25)\qquad \mathfrak{s}^* = u_\nu^{-1}\,\mathfrak{t}^*\,u_{\nu'''}^{-1};\quad \mathfrak{t}^* = s_\nu^{-1}\,\mathfrak{u}^*\,t_{\nu'}^{-1};\quad \mathfrak{u}^* = t_\nu^{-1}\,\mathfrak{s}^*\,s_{\nu''}^{-1}\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen müssen. Damit erkennt man, daß diese Operation gleich

$$(u_{k'''}^{-1}\,|\,u_{k'''}\,|\,(\mathfrak{u}^*)^{-1}\,\mathfrak{x}_k\,\mathfrak{u}^*)X$$

ist, daß demnach $(\mathfrak{u}^*)^{-1}\,\mathfrak{x}_k\,\mathfrak{u}^*$ wieder eine Normalsubstitution und zwar die zu k''' gehörige ist. Wir haben also den folgenden Satz:

Satz 12: Die Substitution $\mathfrak{x}_k$ ist dann und nur dann die zu k gehörige Normalsubstitution des Quadrates Q, wenn Q die uneigentliche Transformation

$$(u_k^{-1}\,|\,u_k\,|\,\mathfrak{x}_k)X$$

in sich besitzt. Der Komplex der Normalsubstitutionen ist mit jedem Element von $\mathfrak{U}^*$ vertauschbar, und dasselbe gilt für den in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Komplex der Produkte von je zwei Normalsubstitutionen.

Aus (25) ergeben sich die den Gleichungen (9 a, b) entsprechenden Beziehungen, denen eine uneigentliche Übergangssubstitution $\mathfrak{u}^*$ genügen muß:

$$\left.\begin{aligned} &(26\,\text{a})\qquad (\mathfrak{u}^*)^{-1}\,s_i\,s_k^{-1}\,\mathfrak{u}^* = t_{i'}^{-1}\,t_{k'} \\ &(26\,\text{b})\qquad (\mathfrak{u}^*)^{-1}\,t_i^{-1}\,t_k\,\mathfrak{u}^* = s_{i''}\,s_{k''}^{-1} \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned} &(i = 1, 2, \ldots, n \\ &k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

---

[1]) Siehe § 2 Anfang.

[2]) Ebenso führt die Ausübung von u_k auf die Spalten von Q zu einem k-normierten Quadrat. Beide Tatsachen lassen sich am einfachsten direkt aus Figur 1 ablesen.

Aber die analogen Relationen für zwei zugehörige Komponenten $\mathfrak{s}^*$ und $\mathfrak{t}^*$ gehen hieraus nicht wie dort [1]) durch zyklische Vertauschung hervor. Sie lauten:

(27 a) $(\mathfrak{s}^*)^{-1} t_i t_k^{-1} \mathfrak{s}^* = s_{i'''}^{-1} s_{k'''}$ | (28 a) $(\mathfrak{t}^*)^{-1} s_i^{-1} s_k \mathfrak{t}^* = t_{i'} t_{k'}^{-1}$

(27 b) $(\mathfrak{s}^*)^{-1} u_i^{-1} u_k \mathfrak{s}^* = u_{i'''} u_{k'''}^{-1}$ | (28 b) $(\mathfrak{t}^*)^{-1} u_i u_k^{-1} \mathfrak{t}^* = u_{i'''}^{-1} u_{k'''}$.

Es transformiert also

$\mathfrak{s}^*$:	$\mathfrak{R}_i^u$ in	$\bar{\mathfrak{R}}_{i'''}^u$ und	$\bar{\mathfrak{R}}_i^t$ in	$\mathfrak{R}_{i'''}^s$
$\mathfrak{t}^*$:	$\mathfrak{R}_i^s$	$\bar{\mathfrak{R}}_{i'}^t$	$\bar{\mathfrak{R}}_i^u$	$\mathfrak{R}_{i'''}^u$
$\mathfrak{u}^*$:	$\mathfrak{R}_i^t$	$\bar{\mathfrak{R}}_{i'''}^s$	$\bar{\mathfrak{R}}_i^s$	$\mathfrak{R}_{i'}^i$,

und dafür, daß eine dieser Komponenten zu einer uneigentlichen Transformation von Q in sich gehört, reicht wieder hin, daß sie eine der sie betreffenden Transformationsbedingungen für ein bestimmtes i erfüllt. Insbesondere genügt es für die Existenz einer uneigentlichen Umordnung von Q in sich, daß einer der Zeilenkomplexe $\bar{\mathfrak{R}}_i^s$ mit einem der Spaltenkomplexe $\mathfrak{R}_i^t$ übereinstimmt.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß eine ähnliche Erweiterung, wie die hier mit Operationen vom Typus C^*X durchgeführte, vorgenommen werden kann mittels Operationen vom Typus $C^{(1)}R_1$ oder $C^{(2)}R_2$, wo $C^{(1)}$ bzw. $C^{(2)}$ eine Transformation ist, welche Q in Q_1 bzw. Q_2 überführt. Dabei hat die Existenz zweier Transformationen von Q in sich, die zwei verschiedenen von diesen drei Typen angehören, stets die Existenz einer Transformation vom dritten Typus zur Folge. In diesem Fall erfährt dann die Transformationsgruppe Γ von Q eine Erweiterung auf eine Gruppe Γ' der sechsfachen Ordnung, welche Γ als Normalteiler enthält, und die Faktorgruppe Γ'/Γ ist isomorph zu $\mathfrak{R}$. Γ' enthält dann auch Operationen der Form $C^{(1x)}R_1X$ und $C^{(2x)}R_2X$. Unter Umständen kann Γ auch nur durch Operationen der letzten beiden Typen erweitert werden. Die erweiterte Gruppe enthält in diesem Fall Γ als Normalteiler vom Index 3.

II. Unionen.

§ 6. Union und lateinisches Quadrat.

Ein System von endlich vielen verschiedenen Elementen heiße eine *Union*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

I. Jedem geordneten Paar (a, b) von gleichen oder verschiedenen Elementen des Systems ist eindeutig ein Element c des Systems als ihr „Produkt" zugeordnet, was durch die Gleichung

$$a \cdot b = c$$

zum Ausdruck gebracht wird.

II. Das System enthält ein Einheitselement e, das mit jedem Element a des Systems den Forderungen

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

genügt.

(Es folgt dann in bekannter Weise, daß es nur ein solches Element im System geben kann.)

III. Für je drei Elemente a, b, c des Systems folgt aus

$$c \cdot a = c \cdot b \text{ und ebenso aus } a \cdot c = b \cdot c$$

die Beziehung

$$a = b.$$

[1]) Siehe § 4 nach (19).

Der so definierte Begriff der Union umfaßt offenbar den der Gruppe, und zwar sind die Gruppen unter den Unionen durch die Assoziativität des in I eingeführten Produkts charakterisiert.

Die Anzahl n der verschiedenen Elemente einer Union heiße ihre *Ordnung*. Multipliziert man alle diese Elemente rechts mit einem Element a der Union, so erhält man wegen I und III gerade wieder alle n Elemente der Union. Dasselbe gilt bei Multiplikation links. Die Gleichungen

$$x \cdot a = b \quad \text{und} \quad a \cdot x = b$$

haben also je eine eindeutig bestimmte Lösung. Insbesondere gibt es zu jedem Element a der Union ein eindeutig bestimmtes *rechtes inverses Element* $\overleftarrow{a}$ und ein ebensolches *linkes* $\overrightarrow{a}$, so daß

$$\overrightarrow{a} \cdot a = a \cdot \overleftarrow{a} = e$$

ist. Diese beiden Elemente brauchen nicht, wie bei einer Gruppe, einander gleich zu sein.

Die *rechten Potenzen* $a^{\varkappa)}$ des Elementes a werden für alle positiven ganzen Werte von $\varkappa$ durch

$$a^{\varkappa)} = a^{\varkappa-1)} \cdot a; \quad a^{0)} = e$$

und ebenso die linken Potenzen $a^{(\varkappa}$ durch:

$$a^{(\varkappa} = a \cdot a^{(\varkappa-1}; \quad a^{(0} = e$$

definiert. Man zeigt dann leicht, daß es zwei eindeutig bestimmte positive ganze Zahlen α und α' gibt, so daß die Gleichungen

$$a^{x)} = e; \quad a^{(x'} = e$$

für $x = m\alpha$; $x' = m\alpha'$ (m positiv ganz oder Null) und nur für diese Werte der Exponenten erfüllt werden. Diese beiden Zahlen heißen die *rechte* bzw. *linke Ordnung* von a. Dabei ist

$$a^{\alpha-1)} = \overrightarrow{a}; \quad a^{(\alpha'-1} = \overleftarrow{a}.$$

Es sei hier aber hervorgehoben, daß α weder mit α' noch mit der linken oder rechten Ordnung von $\overrightarrow{a}$ oder $\overleftarrow{a}$ übereinzustimmen braucht. Auch ist durchaus nicht nötig, daß eine dieser Zahlen ein Teiler der Ordnung der Union ist, welcher a angehört.

Genügt ein Teilsystem von Elementen einer Union für sich dem Postulat I, so enthält es auch das Einheitselement. Da es als Teilsystem sowieso auch dem Postulat III Genüge leistet, ist es selbst eine Union und heiße eine *Subunion* der betreffenden Union.

Zwei Unionen derselben Ordnung heißen *isomorph*, wenn sich ihre Elemente einander ein-eindeutig so zuordnen lassen, daß mit jeder Relation zwischen den Elementen der einen:

$$a \cdot b = c$$

auch die Relation:

$$a' \cdot b' = c'$$

zwischen den entsprechenden Elementen der andern erfüllt ist, oder mit andern Worten, wenn sich die beiden lediglich durch die Bezeichnung der Elemente voneinander unterscheiden. *Automorphismus* einer Union heißt jede isomorphe Beziehung derselben auf sich selbst. Er drückt sich durch eine Substitution der Elemente aus, welche dadurch charakterisiert ist, daß sie die Gesamtheit der zwischen den Elementen bestehenden Relationen $a \cdot b = c$ in sich überführt. Diese Substitutionen bilden die *Automorphismengruppe* $\mathfrak{A}$ der Union.

Das assoziative Gesetz gilt zwar im allgemeinen in einer Union nicht, es kann jedoch vorkommen, daß es wenigstens teilweise erfüllt ist. Wir wollen sagen, für das Element p der Union gelte das assoziative Gesetz 1. rechts, 2. links, 3. in der Mitte, wenn für alle möglichen Elemente i, k der Union stets beziehungsweise

1.) $(i \cdot k) \cdot p = i \cdot (k \cdot p)$, 2.) $p \cdot (i \cdot k) = (p \cdot i) \cdot k$, 3.) $(i\ p) \cdot k = i \cdot (p \cdot k)$

erfüllt ist. Haben dann die Elemente p_1 und p_2 beide ein- und dieselbe dieser drei Eigenschaften, so kommt sie, wie man leicht sieht, auch dem Element $p_1 \cdot p_2$ zu. Alle Elemente dieser Art bilden also eine Subunion mit Gruppeneigenschaft, eine Untergruppe der Union. Wir nennen sie die 1. *rechte*, 2. *linke*, 3. *mittlere Untergruppe* der Union und bezeichnen sie, wenn $\mathfrak{F}$ die Union ist, mit $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ bzw. $\mathfrak{F}_3$. Man zeigt ferner, wie bei einer Gruppe, daß die Union im Falle 1 eine linksseitige, im Fall 2 eine rechtsseitige Zerlegung und im Fall 3 beide Arten der Zerlegung nach der betreffenden Untergruppe zuläßt. Die Ordnungen dieser drei Untergruppen und folglich auch aller ihrer Elemente sind demnach Teiler der Ordnung der Union.

Wie bei einer Gruppe können auch bei einer Union die Produkte je zweier Elemente in übersichtlicher Weise durch ein quadratisches Schema dargestellt werden. Dasselbe besitzt, wenn die Union von der n-ten Ordnung ist, n^2 Felder. Das erste Feld der ersten Zeile, der Ursprung, enthält das Einheitselement, die übrigen Felder der ersten Zeile und der ersten Spalte werden je in willkürlicher Reihenfolge durch die $n - 1$ übrigen Elemente der Union ausgefüllt. Im Schnitt der mit a beginnenden Zeile und der mit b beginnenden Spalte steht das Element $c = a \cdot b$. Das so entstehende Gebilde ist ein lateinisches Quadrat, von dem wir sagen wollen, es gehöre zu der betreffenden Union. Ist die Bezeichnung der Elemente einer Union in bestimmter Weise festgelegt, so gibt es $[(n-1)!]^2$ zugehörige verschiedene Quadrate. Umgekehrt definiert jedes lateinische Quadrat eine bestimmte Union.

Im folgenden werden die Elemente einer Union stets durch die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.

Unter den Umordnungen (§ 1) eines Quadrats unterscheiden wir jetzt *unwesentliche*, bei denen das Ursprungselement in Ruhe bleibt, und *wesentliche*, bei denen es wechselt, sei es nun, daß es durch ein anderes Element der Union oder auch nur durch eines der $n - 1$ übrigen im Quadrat enthaltenen Exemplare desselben Unionelementes ersetzt wird. Wir können dann sagen:

Zwei zu derselben Union gehörige Quadrate unterscheiden sich nur durch eine unwesentliche Umordnung, zwei zu isomorphen Unionen gehörige durch eine Transformation (§ 3), deren erste zwei Komponenten eine unwesentliche Umordnung darstellen, und ein Automorphismus erweist sich als eine Substitution, welche durch eine unwesentliche Umordnung zu einer Transformation eines der zur Union gehörenden Quadrate in sich ergänzt werden kann.

Jeder Union ist eindeutig eine Übergangsgruppe (§ 3) zugeordnet, nämlich diejenige, welche allen zugehörigen Quadraten gemeinsam ist.

Ist 1 das Einheitselement, so gehört zu der Union ein einziges reduziertes Quadrat (§ 2) und gleiche Unionen haben dasselbe reduzierte Quadrat.

§ 7. Automorphismen. Einteilung der Übergangssubstitutionen.

Es sei

$$Q = \boxed{a_{ik}}$$

irgendeines der zur Union $\mathfrak{F}$ gehörigen Quadrate[1]), Γ seine Transformations- und $\mathfrak{U}$ seine Übergangsgruppe. Diejenigen Substitutionen von $\mathfrak{U}$, welche das Einheitselement e von $\mathfrak{F}$ ungeändert lassen, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{U}^{(e)}$.

Ein Automorphismus $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{F}$ ist nun nach obigem charakterisiert als eine Substitution, welche durch eine unwesentliche Umordnung zu einer Transformation von Q in sich ergänzt werden kann. Jede solche Substitution liegt folglich einerseits in $\mathfrak{U}^{(e)}$ und ist andererseits nach Satz 4* auch in den Untergruppen $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ und $\mathfrak{N}_1^t$ von $\mathfrak{U}$ enthalten. Liegt umgekehrt eine Substitution in $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$, so gibt es nach demselben Satz eine zugehörige Umordnung, deren erste Komponente die Ziffer 1 ungeändert läßt. Liegt die Substitution außerdem in $\mathfrak{U}^{(e)}$, so muß bei der genannten Umordnung das Ursprungeslement an seinem Platze bleiben, ihre zweite Komponente läßt also ebenfalls 1 ungeändert, und die Substitution ist demnach ein Automorphismus. Somit gilt, wenn noch für den Durchschnitt der beiden Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Bezeichnung $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eingeführt wird, der

Satz 13: Ist Q ein zu der Union $\mathfrak{F}$ gehöriges Quadrat, $\mathfrak{U}^{(e)}$ derjenige Teiler seiner Übergangsgruppe, dessen Substitutionen das Einheitselement von $\mathfrak{F}$ ungeändert lassen, und $\mathfrak{D}_1$ der Durchschnitt von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ und $\mathfrak{N}_1^t$, so hat man für die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$ die Darstellungen:

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}^{(e)}, \overline{\mathfrak{N}}_1^s] = [\mathfrak{U}^{(e)}, \mathfrak{N}_1^t] = [\mathfrak{U}^{(e)}, \mathfrak{D}_1].$$

Jetzt sei 1 das Einheitselement von $\mathfrak{F}$ und Q reduziert. Dann ist

$$\left.\begin{matrix} a_{i1} = a_{1i} = i \\ a_{ik} = a_{i1} \cdot a_{1k} = i \cdot k \end{matrix}\right\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{29}$$

also wegen (1)

$$s_i^{-1} = \binom{\nu}{i \cdot \nu}; \quad t_k = \binom{\nu}{\nu \cdot k}; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

und speziell

$$s_1 = t_1 = \mathfrak{e}. \tag{31}$$

Die Gleichungen (20) ergeben dann:

$$\mathfrak{N}_1^s = (s_\nu); \quad \overline{\mathfrak{N}}_1^s = (s_\nu^{-1}); \quad \mathfrak{N}_1^t = (t_\nu); \quad \overline{\mathfrak{N}}_1^t = (t_\nu^{-1}). \tag{32}$$

Ist nun $\mathfrak{a}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{F}$, so suchen wir eine Transformation (3) von Q in sich auf, deren dritte Komponente $\mathfrak{u}$ gleich $\mathfrak{a}$ ist, während $\mathfrak{U}$ eine unwesentliche Umordnung sein soll. Hierzu hat man

$$1' = 1'' = 1 \tag{33}$$

zu setzen. Aus den letzten beiden Gleichungen (18) folgt dann aber wegen (31):

$$\mathfrak{s} = t = \mathfrak{u}, \tag{34}$$

und ebenso ergibt sich aus (34) rückwärts wieder (33). Ist jetzt $\mathfrak{v}$ irgendeine Substitution, so wollen wir die Transformation, deren drei Komponenten gleich $\mathfrak{v}$ sind, die *Repetition* von $\mathfrak{v}$ nennen. Die Repetitionen aller Substitutionen einer Gruppe $\mathfrak{V}$ bilden dann eine mit $\mathfrak{V}$ isomorphe Gruppe V von Transformationen, die *Repetition von* $\mathfrak{V}$. In dieser Ausdrucksweise bedeutet die eben gemachte Feststellung, daß die Repetition jedes Automorphismus in Γ enthalten und daß umgekehrt jede Operation aus Γ, deren drei Komponenten einander gleich sind, die Repetition eines Automorphismus ist.

---

[1]) Die Elemente der Union sind $1, 2, \ldots, n$; 1 braucht aber vorläufig nicht Einheitselement zu sein.

Aus (18) erkennen wir noch, daß ein Automorphismus

$$\mathfrak{a} = \binom{\nu}{\nu'}$$

im reduzierten Quadrat die Beziehungen

$$(35) \qquad \mathfrak{a}^{-1} u_\nu \mathfrak{a} = u_{\nu'}; \quad \mathfrak{a}^{-1} s_\nu \mathfrak{a} = s_{\nu'}; \quad \mathfrak{a}^{-1} t_\nu \mathfrak{a} = t_{\nu'} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen muß. Wir wenden uns jetzt zu den koordinierten Quadraten. Zu jedem derselben gehört eine mit $\mathfrak{F}$ *koordinierte Union*. Die Frage ist, wie deren Automorphismengruppe mit derjenigen von $\mathfrak{F}$ zusammenhängt. Zunächst sei festgestellt, daß nach (32) die Normalisatoren von $\mathfrak{R}_1^s$ und $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ sowie die von $\mathfrak{R}_1^t$ und $\overline{\mathfrak{R}}_1^t$ übereinstimmen. Betrachtet man nun in einem der koordinierten Quadrate den Normalisator des ersten Zeilen- und den des ersten Spaltenkomplexes, so lehrt ein Blick auf die Tabelle der Erzeugenden (Seite 193), daß stets eine dieser beiden Gruppen mit $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ oder $\mathfrak{N}_1^t$ übereinstimmt. Satz 13 läßt sich aber auch so formulieren: Die Automorphismengruppe eines Quadrates besteht aus denjenigen Substitutionen von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$, welche das Ursprungselement ungeändert lassen (wobei an der Stelle von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ auch $\mathfrak{N}_1^t$ stehen kann). Da 1 in allen koordinierten Quadraten Ursprungselement ist, so folgt daraus unmittelbar, daß die koordinierten Unionen alle dieselbe Automorphismengruppe besitzen.

Somit haben wir den

Satz 14: Ist Q das reduzierte Quadrat und $\mathfrak{A}$ die Automorphismengruppe einer Union $\mathfrak{F}$, so enthält die Transformationsgruppe Γ von Q die Repetition A von $\mathfrak{A}$ als Untergruppe, außerhalb derselben jedoch keine Operation mit drei gleichen Komponenten. $\mathfrak{A}$ ist Teiler von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ und ist zugleich Automorphismengruppe aller mit $\mathfrak{F}$ koordinierten Unionen.

Wir teilen nun die Übergangssubstitutionen des reduzierten Quadrats Q in folgender Weise ein: *Die Substitution* $\mathfrak{u}$ *gehöre zu dem Element* a_{pq} von Q, wenn es eine Transformation (3) von Q in sich gibt derart, daß die Umordnung U das Element a_{pq} in den Ursprung befördert. Dabei hat man offenbar

$$(36) \qquad p' = q'' = 1$$

zu setzen, und mit (31) erhält man dann aus (18) für C die Form:

$$(37) \qquad C = t_q \mathfrak{u} \,|\, s_p^{-1} \mathfrak{u} \,|\, \mathfrak{u}.$$

Hieraus und aus Satz 4* ergibt sich, daß $\mathfrak{u}$ folgende Eigenschaften hat:

I. sie ersetzt das Element $a_{pq} = p \cdot q$ durch 1,

II a. sie transformiert $\overline{\mathfrak{R}}_p^s$ in $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$,

II b. sie transformiert $\mathfrak{R}_q^t$ in $\mathfrak{R}_1^t$,

sowie daß sie durch I und II a oder II b vollständig charakterisiert ist.

Nach Satz 13 sind demnach die Automorphismen einer Union identisch mit den Übergangssubstitutionen, welche zu dem Ursprungselement ihres reduzierten Quadrats gehören.

Ferner erkennt man, daß diejenigen Elemente von Q, zu denen überhaupt Übergangssubstitutionen gehören, mit a_{11} ähnlich (§ 3) sind, sie bilden die a_{11} enthaltende *Klasse ähnlicher Elemente* von Q.

Sind nun $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zwei zu a_{pq} gehörige Substitutionen, so ist $\mathfrak{u}^{-1}\mathfrak{v}$ wegen (37) und Satz 14 ein Automorphismus von $\mathfrak{F}$, wir haben also:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{a}.$$

Andererseits folgt direkt aus obiger Definition, daß mit $\mathfrak{u}$ auch jede Substitution der

Form ua zu a_{pq} gehört. Wenn ferner u zu zwei Elementen von Q, $a_{p_1q_1}$ und $a_{p_2q_2}$, gehört, so müssen diese ziffernmäßig gleich sein, und nach (37) besitzt dann Q die Umordnung in sich:

$$t_{q_1} t_{q_2}^{-1} \mid s_{p_1}^{-1} s_{p_2},$$

welche offensichtlich $a_{p_1q_1}$ an die Stelle von $a_{p_2q_2}$ bringt, die beiden Elemente sind somit verwandt (§ 1). Da, wie man sich leicht überzeugt, auch die Umkehrung hiervon richtig ist, so gilt

Satz 15: Die zu dem Element a_{pq} des reduzierten Quadrats Q gehörigen Übergangssubstitutionen bilden, wenn u eine derselben ist, den Komplex $u\mathfrak{A}$. Gehört eine Substitution zu zwei Elementen von Q, so sind sie verwandt, und umgekehrt gehören zu verwandten Elementen stets dieselben Substitutionen.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist der

Zusatz: Hat die Umordnungsgruppe von Q die Ordnung 1, so gehört jede Übergangssubstitution nur zu einem einzigen Element, und umgekehrt.

Nach obiger Charakterisierung gehören zu den Elementen der ersten Zeile (Spalte) von Q die Substitutionen von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$. Eine Substitution des Durchschnitts $\mathfrak{D}_1$ gehört also sowohl zu einem Element der ersten Zeile als auch zu einem der ersten Spalte, muß folglich im Falle unseres Zusatzes zu a_{11} gehören und ist daher ein Automorphismus. Nach Satz 13 ist aber $\mathfrak{A}$ stets in $\mathfrak{D}_1$ enthalten, demnach ist $\mathfrak{A}$ in diesem Falle mit $\mathfrak{D}_1$ identisch. Da die Voraussetzung, daß Q reduziert ist, hier keine Rolle spielt, so können wir Satz 13 ergänzen durch

Satz 13a: Besitzt das Quadrat Q außer der identischen keine Umordnung in sich, so gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}_1 \ ^{1}).$$

Die hier eingeführte Einteilung der Übergangssubstitutionen entspricht der linksseitigen Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{U}$ nach $\mathfrak{A}$. Der Index von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{U}$ läßt sich jetzt leicht angeben. Es seien u, α, γ_3 der Reihe nach die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \Omega_3$, und $\varkappa$ die Anzahl der Elemente in der Klasse von a_{11}, dann sind nach Satz 1 je γ_3 dieser $\varkappa$ Elemente verwandt, und die Anzahl der verschiedenen Nebengruppen von $\mathfrak{A}$ ist somit $\frac{\varkappa}{\gamma_3}$. Folglich ist

$$\frac{u}{\alpha} = \frac{\varkappa}{\gamma_3}, \tag{38}$$

oder wenn die Ordnung von Γ noch durch γ bezeichnet wird,

$$\gamma = \gamma_3 u = \alpha\varkappa. \tag{39}$$

Aus den Nebengruppen von $\mathfrak{A}$ bilden wir nun größere Komplexe durch Zusammenfassung aller zu einer bestimmten Zeile (Spalte), d. h. zu ihren Elementen, gehörigen Übergangssubstitutionen. Die zur p-ten Zeile (q-ten Spalte) gehörigen Substitutionen sind dann durch die Eigenschaft II a (II b) charakterisiert. Daraus folgt, daß diese neuen Komplexe die Form $u\,\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ ($u\,\mathfrak{N}_1^t$) haben. Auch die zweite Hälfte und der Zusatz von Satz 15 übertragen sich auf die gegenwärtige Einteilung der Übergangssubstitutionen, welche der Zerlegung von $\mathfrak{U}$ in Nebengruppen von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ entspricht. Bezeichnet man die Ordnung von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ durch $n_1^s(n_1^t)$, so sind, da $\mathfrak{A}$ Teiler von beiden Gruppen ist, in jeder dieser Nebengruppen $\frac{n_1^s}{\alpha}\left(\frac{n_1^t}{\alpha}\right)$ Nebengruppen von $\mathfrak{A}$ vereinigt. Folglich gilt:

[1]) Dieser Satz ist nicht umkehrbar. (Vgl. III, § 12, $n = 6$; IX b.)

Satz 16: Die zu einer bestimmten Zeile (Spalte) des reduzierten Quadrats Q gehörigen Übergangssubstitutionen bilden einen linksseitigen Nebenkomplex von $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$. Eine Zeile (Spalte) enthält entweder kein Element aus der Klasse von a_{11} oder soviel, als der Index von $\mathfrak{A}$ unter $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ angibt.

Wir bemerken noch, daß zu einer Zeile (Spalte) dann und nur dann Übergangssubstitutionen gehören, wenn sie mit der ersten Zeile (Spalte) ähnlich ist oder, was nach Satz 4 dasselbe bedeutet, wenn der betreffende Zeilen-(Spalten-)komplex zu $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ konjugiert ist. Bezeichnet man die Anzahl der zu $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ konjugierten Zeilen-(Spalten-)komplexe mit $\varkappa^s(\varkappa^t)$, so treten hier an die Stelle von (38) die Gleichungen:

$$(40) \qquad \frac{u}{n_1^s} = \frac{\varkappa^s}{\gamma_3}\,; \quad \frac{u}{n_1^t} = \frac{\varkappa^t}{\gamma_3}\ ^{1}).$$

Hieraus folgt speziell

Satz 17: Sind die Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte eines Quadrats Q ähnlich, so sind alle Elemente desselben einander ähnlich.

In diesem Falle ist nämlich nach Satz 16

$$n_1^s = n_1^t = \alpha n$$

und ferner

$$\varkappa^s = \varkappa^t = n\,,$$

woraus sich wegen (39) und (40) $\varkappa = n^2$ ergibt. Der Satz bleibt offenbar richtig, wenn man statt der ersten irgendeine Zeile und Spalte betrachtet.

Wie der Automorphismengruppe entspricht auch jeder der Gruppen $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ und $\mathfrak{N}_1^t$ in einem reduzierten Quadrat eine einfach charakterisierbare Untergruppe von Γ. Ist nämlich $\mathfrak{u}$ eine zum Element $q(p)$ der ersten Zeile (Spalte) gehörige Übergangssubstitution, so enthält Γ gemäß (37) die Operation

$$t_q\,\mathfrak{u}\,|\mathfrak{u}|\,\mathfrak{u} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{u}\,|s_p^{-1}\mathfrak{u}|\,\mathfrak{u}\,,$$

und aus (18) folgt umgekehrt, daß jede Substitution, welche zugleich zweite (erste) und dritte Komponente ein- und derselben Operation von Γ ist, in $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$ liegt.

Zum Schluß werde die Übergangsgruppe des reduzierten Quadrats Q noch zerlegt nach der Untergruppe $\mathfrak{U}^{(1)}$, deren Substitutionen 1 ungeändert lassen. Der Index derselben gibt dann die Anzahl der verschiedenen in der Klasse von a_{11} auftretenden Elemente der Union $\mathfrak{F}$ an. Da $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{U}^{(1)}$ liegt, so enthält jede der linksseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{U}^{(1)}$ soviel Nebengruppen von $\mathfrak{A}$, als der Index a von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{U}^{(1)}$ angibt. Daraus folgt

Satz 18: Ist Q das reduzierte Quadrat der Union $\mathfrak{F}$, γ_3 die Ordnung seiner Umordnungsgruppe und a der Index der Automorphismusgruppe $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{U}^{(1)}$, so tritt jedes in der Klasse von a_{11} überhaupt vorkommende Element von $\mathfrak{F}$ dort $a\,\gamma_3$-mal auf.

§ 8. Verwandte Unionen. Assoziativität.

Das reduzierte Quadrat Q der Union $\mathfrak{F}$ gehe vermöge einer wesentlichen Umordnung U in Q' über. Dann definiert Q' eine neue Union (§ 6), deren Elemente zwar durch die-

---

[1]) $\varkappa^s(\varkappa^t)$ ist übrigens ein Vielfaches von $\gamma_2\,(\gamma_1)$. Bezeichnet man nämlich die Ordnungen von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ mit s, t, u, so ist $\gamma = \gamma_1 s = \gamma_2 t = \gamma_3 u$, und damit folgt aus (40) zunächst:

$$\varkappa^s = \frac{t}{n_1^s}\gamma_2\,; \quad \varkappa^t = \frac{s}{n_1^t}\gamma_1.$$

Nach den Sätzen 4* und 6* ist nun $\mathfrak{N}_1^s(\overline{\mathfrak{N}}_1^t)$ in $\mathfrak{T}(\mathfrak{S})$ enthalten. Da aber $\mathfrak{N}_1^s(\overline{\mathfrak{N}}_1^t)$ wegen (21) dieselbe Ordnung hat wie $\overline{\mathfrak{N}}_1^s(\mathfrak{N}_1^t)$, so ist $t\,(s)$ durch $n_1^s\ (n_1^t)$ teilbar. (Vgl. hierzu auch die Bemerkungen nach Satz 7, S. 196.)

selben Ziffern bezeichnet sind wie diejenigen von $\mathfrak{F}$, aber im allgemeinen andere Verknüpfungsrelationen erfüllen. Jede auf diese Weise entstehende Union nennen wir mit $\mathfrak{F}$ *verwandt* und bezeichnen sie durch $\mathfrak{F}_{pq}$, wenn durch die Umordnung U das Element a_{pq} von Q in den Ursprung befördert wird. Jedem Element von Q ist so eine bestimmte mit $\mathfrak{F}$ verwandte Union, dem Ursprungselement die Union $\mathfrak{F}$ selbst zugeordnet. Diejenigen unter diesen Unionen, welche, wie $\mathfrak{F}$, 1 zum Einheitselement haben, nennen wir *stammverwandt.*

Die Transformationsgruppe von Q' entsteht aus derjenigen von Q durch Transformation mit U, die Übergangsgruppen verwandter Unionen stimmen folglich überein.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\mathfrak{F}_{pq}$ mit $\mathfrak{F}$ identisch ist. Dies tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn die Elemente a_{pq} und a_{11} verwandt sind. Man kann also die Umordnung U von vornherein so wählen, daß Q' mit Q übereinstimmt, d. h. als Umordnung von Q in sich, und da nach Satz 15 e eine zu a_{pq} gehörige Übergangssubstitution ist, so hat man als Komponenten von U nach (37):

$$\mathfrak{s} = t_q\,; \qquad \mathfrak{t} = s_p^{-1}. \tag{41}$$

Diese sind nach Satz 1 regulär, und aus (30) folgt:

$$\nu' = \nu \cdot q\,; \qquad \nu'' = p \cdot \nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

woraus sich wegen (36)

$$p \cdot q = 1 \tag{43}$$

ergibt. Mit (41) und (42) erhält man aus (18, 3):

$$t_q = t_\nu t_{p\cdot\nu}^{-1}\,; \qquad s_p^{-1} = s_\nu^{-1} s_{\nu\cdot q} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

Hieraus findet man mit $\nu = 1$:

$$t_q = t_p^{-1}\,; \qquad s_p^{-1} = s_q\,, \tag{45}$$

und wenn man dies wieder in (44) einsetzt:

$$t_p t_k = t_{p\cdot k}\,; \qquad s_i s_q = s_{i\cdot q} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{46}$$

was sich wegen (30) auch in der Form:

$$(\nu \cdot p) \cdot k = \nu \cdot (p \cdot k)\,; \qquad i \cdot (q \cdot \nu) = (i \cdot q) \cdot \nu \qquad (i, k, \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{47}$$

schreiben läßt. Mit (43) folgt hieraus noch:

$$q \cdot p = 1. \tag{48}$$

p und q sind also im gewöhnlichen Sinn zueinander invers, und in der mittleren Untergruppe $\mathfrak{F}_3$ von $\mathfrak{F}$ (§ 6) enthalten. Wir können somit der Umordnung von Q in sich:

$$U^{-1} = t_q^{-1} \,|\, s_p = t_p \,|\, s_p\,, \tag{49}$$

welche a_{qp} in den Ursprung und a_{11} an den Platz von a_{pq} befördert, eindeutig das Element p von $\mathfrak{F}_3$ zuordnen.

Umgekehrt existiert aber auch zu jedem Element p von $\mathfrak{F}_3$ ein eigentlich inverses Element q, und beide genügen den Gleichungen (47). Dann bestehen aber auch die Beziehungen (46) und speziell (45), aus denen sich rückwärts wieder die Gleichungen (44) ergeben. Diese besagen jedoch gemäß (32):

$$\mathfrak{R}_q^t = \mathfrak{R}_1^t\,; \qquad \overline{\mathfrak{R}}_p^s = \overline{\mathfrak{R}}_1^s\,, \tag{50}$$

das heißt nach Satz 2 die Verwandtschaft von a_{11} und a_{pq}. Zu jedem Element p von $\mathfrak{F}_3$ gibt es demnach auch eine Umordnung (49) von Q in sich. Die hiermit hergestellte eineindeutige Beziehung zwischen den Umordnungen von Q in sich und den Elementen von $\mathfrak{F}_3$ ist wegen (46) isomorph. Es gilt also

Satz 19: Ist Q das reduzierte Quadrat der Union $\mathfrak{F}$, so haben die Umordnungen von Q in sich die Form:

$$t_p \mid s_p .$$

Die Gruppen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{T}_3$, welche demnach in $\mathfrak{K}_1^t$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}_1^s$ enthalten sind [1]), sind ebenso wie die Umordnungsgruppe Ω_3 isomorph mit der mittleren Untergruppe $\mathfrak{F}_3$ von $\mathfrak{F}$, wobei die regulären Substitutionen t_p und s_p, die Umordnung $t_p \mid s_p$ und das Element p von $\mathfrak{F}_3$ einander zugeordnet sind.

Man erkennt hieraus auch, daß die Elemente von $\mathfrak{F}_3$ übereinstimmen mit den Indizes der mit der ersten Zeile (Spalte) verwandten Zeilen (Spalten) oder, wie man nach Satz 2 auch sagen kann, mit den Indizes der mit dem Komplex $\overline{\mathfrak{K}}_1^s(\mathfrak{K}_1^t)$ übereinstimmenden Komplexe $\overline{\mathfrak{K}}_i^s(\mathfrak{K}_i^t)$.

Zur *Ergänzung von Satz* 19 untersuchen wir noch kurz den Einfluß der Untergruppen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ der Union $\mathfrak{F}$ auf die Transformationsgruppe Γ ihres reduzierten Quadrats Q. Die Operationen von Γ_1 bzw. Γ_2 haben hier wegen (31) und (18, 1) bzw. (18, 2) die Form:

$$\mathfrak{e} \mid t_p \mid t_p \quad \text{bzw.} \quad s_p \mid \mathfrak{e} \mid s_p , \tag{51}$$

es ist demnach

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{U}_1 ; \quad \mathfrak{S}_2 \equiv \mathfrak{U}_2 , \tag{52}$$

und diese Gruppen sind nach Satz 7 mit dem Durchschnitt der Komplexe $\mathfrak{K}_i^t$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}_i^s$ identisch. Nach demselben Satz besteht aber hier $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2)$ aus allen mit jedem $s_i(t_i)$ vertauschbaren Substitutionen, und daraus folgt wieder, daß p in $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2)$ liegt, sowie daß auch umgekehrt zu jedem Element p von $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2)$ eine Operation (51) von $\Gamma_1(\Gamma_2)$ gehört. Aus (18, 1 bzw. 2) erhält man ferner ähnlich wie oben:

$$t_i t_p = t_{i \cdot p} \quad \text{bzw.} \quad s_p s_i = s_{p \cdot i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Die Gruppen $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2)$, $\Gamma_1(\Gamma_2)$ und $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2)$ sind also isomorph in der Art, daß das Element p von $\mathfrak{F}_1$ $(\mathfrak{F}_2)$, die Transformation (51) von Γ_1 (Γ_2) und die Substitution t_p (s_p) von $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2)$ einander zugeordnet sind. Die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ $(\mathfrak{F}_2)$ stimmen mit den Indizes derjenigen Substitutionen t_i (s_i) überein, deren jede mit allen s_i (t_i) vertauschbar ist, oder — wie man nach Satz 7 a auch sagen kann — welche in allen Komplexen $\mathfrak{K}_i^t$ $(\overline{\mathfrak{K}}_i^s)$ enthalten sind.

Geht nun das Quadrat Q vermöge der Transformation C in Q' über, und ist Γ seine Transformationsgruppe, so ist $\Gamma' = C^{-1}\Gamma C$ diejenige von Q', und bei der Transformation mit C entstehen aus den Normalteilern Γ_r von Γ die ebenso definierten Normalteiler Γ_r' von Γ'. Damit können wir uns von der Voraussetzung, daß Q reduziert war, befreien und gelangen so zu

Satz 19*: Ist Q ein zu der Union $\mathfrak{F}$ gehöriges Quadrat und Γ seine Transformationsgruppe, so ist Γ_r isomorph mit $\mathfrak{F}_r$ $(r = 1, 2, 3)$.

Aus Satz 19 folgt:

Satz 20: a) Ein Quadrat gehört dann und nur dann zu einer Gruppe, wenn seine Umordnungsgruppe die Ordnung n hat. b) Eine Union ist dann und nur dann eine Gruppe, wenn alle stammverwandten Unionen mit ihr identisch sind [2]).

Allgemeiner gilt wegen Satz 19*

Satz 20*: Hat eine der drei Gruppen Γ_r $(r = 1, 2, 3)$ eines Quadrats Q die Ordnung n, so ist Q eine Gruppentafel. Ist andererseits Q Gruppentafel einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so sind alle drei Gruppen Γ_r isomorph mit $\mathfrak{G}$.

---

[1]) Es sei hier noch daran erinnert, daß nach Satz 7 und 6* die Gruppe $\mathfrak{T}_3$ $(\mathfrak{S}_3)$ mit dem Durchschnitt der Komplexe $\mathfrak{K}_i^s(\overline{\mathfrak{K}}_i^t)$ identisch ist.

[2]) Hierzu folgt später (§ 10, S. 214) noch eine Anmerkung.

In Verbindung mit Satz 6 folgt hieraus weiter

Satz 21: Mit einem Quadrat sind auch seine koordinierten Quadrate Gruppentafeln, und die sechs zugehörigen Gruppen sind isomorph.

Wir schließen hier noch eine Bemerkung über den Aufbau eines Quadrats aus Gruppentafeln an. Hat nämlich die Umordnungsgruppe von Q die Ordnung γ_3, und ordnet man Q (unwesentlich) derart um, daß verwandte Zeilen sowie verwandte Spalten nebeneinander zu liegen kommen, so setzt sich das entstandene Quadrat Q' nach Satz 1 aus $(n/\gamma_3)^2$ Quadraten der Ordnung γ_3 zusammen, deren jedes γ_3 Umordnungen in sich zuläßt, also eine Gruppentafel ist. Da aber die Umordnungsgruppe jedes dieser Teilquadrate isomorph mit derjenigen von Q und mit der durch das Teilquadrat dargestellten Gruppe ist, so besteht Q' aus $(n/\gamma_3)^2$ Gruppentafeln ein- und derselben abstrakten Gruppe.

In dem reduzierten Quadrat Q der Union $\mathfrak{F}$ ist, wie oben festgestellt wurde, die Verwandtschaft der Elemente a_{pq} und a_{11} gleichbedeutend mit der Identität der Unionen $\mathfrak{F}_{pq}$ und $\mathfrak{F}$. Allgemeiner kann man sagen, zu zwei Elementen von Q gehört dann und nur dann dieselbe Union, wenn sie verwandt sind. Wir betrachten jetzt noch den Fall, daß daß $\mathfrak{F}_{pq}$ mit $\mathfrak{F}$ isomorph ist. Damit gleichbedeutend ist die Existenz einer zu a_{pq} gehörigen Übergangssubstitution (37) oder mit anderen Worten die Ähnlichkeit von a_{pq} und a_{11}. Die Elemente der Klasse von a_{11} und nur diese liefern also Unionen, welche mit $\mathfrak{F}$ isomorph sind, und allgemein gehören zu zwei Elementen des Quadrats dann und nur dann isomorphe Unionen, wenn sie ähnlich sind. Unter den mit $\mathfrak{F}$ verwandten Unionen gibt es folglich soviel wesentlich verschiedene, als in Q Klassen ähnlicher Elemente vorhanden sind. Für diese Überlegungen spielt die Voraussetzung, daß Q reduziert ist, offensichtlich keine Rolle.

Aus dem Satz 17 folgt jetzt: Sind in einem Quadrat die zu den Elementen einer bestimmten Zeile und einer bestimmten Spalte gehörigen Unionen isomorph, so liefern alle seine Elemente isomorphe Unionen.

Mit Hilfe von Satz 13 läßt sich auch die Automorphismengruppe der Union $\mathfrak{F}_{pq}$, welche zu dem Element a_{pq} des Quadrats Q gehört, leicht angeben. Sie besteht nämlich aus denjenigen Substitutionen von $\overline{\mathfrak{R}}_p^s$ (oder auch von $\mathfrak{R}_q^t$), welche die Ziffer a_{pq} ungeändert lassen, oder wie man auch sagen kann, aus den dritten Komponenten derjenigen Transformationen von Q in sich, deren erste Komponente p und deren zweite q ungeändert läßt.

§ 9. Einteilung der lateinischen Quadrate.

Die Gesamtheit der Quadrate, welche sich aus einem gegebenen durch Ausübung von Transformationen (§ 3) und von Operationen der Gruppe $\mathfrak{R}$ (§ 4) herstellen lassen, fassen wir zusammen zu einer *Grundklasse*. Dieselbe enthält mit jedem Quadrat auch alle ähnlichen und koordinierten. Eigenschaften, welche allen Quadraten einer Grundklasse zukommen, sind invariant gegenüber der durch $\mathfrak{R}$ erweiterten allgemeinen Transformationsgruppe $\mathfrak{C}'$, deren Operationen, wenn C irgendeine Transformation und V eine Operation von $\mathfrak{R}$ bedeutet, die Form CV haben. Eine solche Invariante ist z. B. die Ordnung der Transformationsgruppe eines der Quadrate. Jede Grundklasse kann festgelegt werden durch Auswahl irgendeines ihr angehörenden Quadrats. Wir können hierzu ein reduziertes Quadrat wählen, das wir *Grundtypus* nennen wollen.

Innerhalb einer solchen Grundklasse bilden die ähnlichen Quadrate eine *Klasse*, und ihre gemeinsamen Eigenschaften sind invariant gegenüber der Gruppe $\mathfrak{C}$ aller Transformationen. Derartige Invarianten sind z. B. die Ordnungen der Übergangs- und Um-

ordnungsgruppe eines der Quadrate. Aus jeder Klasse wählen wir ein reduziertes Quadrat als *Typus* aus. Die in einer Grundklasse vereinigten Klassen nennen wir *koordiniert.*

Im allgemeinen Fall enthält die Grundklasse sechs Klassen. Diese Anzahl kann sich jedoch auf drei, zwei oder eins reduzieren. Sie reduziert sich auf drei, wenn der Grundtypus eine uneigentliche Transformation in sich von der Form

$$CR_r \qquad (r = 1, 2, 3)$$

besitzt, auf zwei, wenn er eine der Form

$$CR_rR_\varrho \qquad (r \neq \varrho;\ r, \varrho = 1, 2, 3)$$

besitzt, und auf eins, wenn beides der Fall ist [1]).

Schließlich werden die Quadrate einer Klasse noch in *Gattungen* gruppiert, indem man alle diejenigen in einer Gattung vereinigt, deren zugehörige Unionen isomorph sind. Die Gattungseigenschaften sind dann invariant gegenüber der Gruppe aller Transformationen von der Form $U\mathfrak{u}$, wobei U eine unwesentliche Umordnung bedeutet. Als Repräsentant der Gattung wählen wir wieder eines ihrer reduzierten Quadrate, den *Uniontypus*, aus.

Will man die verschiedenen reduzierten Quadrate einer Gattung finden, so hat man zunächst zu beachten, daß ein reduziertes Quadrat bei Ausübung einer Transformation der eben genannten Art dann und nur dann wieder in ein reduziertes Quadrat (derselben Gattung) übergeht, wenn ihre drei Komponenten gleich ein- und derselben die Ziffer 1 ungeändert lassenden Substitution sind. Die Gruppe dieser Transformationen enthält aber die Repetition A der Automorphismengruppe der betreffenden Union (Satz 14), nimmt man also eine rechtsseitige Zerlegung derselben nach dieser Untergruppe A vor, so liefern die Operationen eines Restsystems gerade alle verschiedenen reduzierten Quadrate der Gattung. Die Anzahl dieser Quadrate ist somit gleich dem Index von A d. h. gleich $(n-1)!/\alpha$.

Wir können nun daraus auch die Anzahl der reduzierten Quadrate einer Klasse bestimmen. Wir denken uns zu diesem Zweck die Elemente des die Klasse repräsentierenden Typus in Klassen ähnlicher Elemente zerlegt. Die Anzahl dieser Klassen ist dann, wie oben schon bemerkt wurde (§ 8, Schluß), gleich der Anzahl der in der Klasse enthaltenen Gattungen. Für die Zahl der reduzierten Quadrate in einer dieser Gattungen kann man aber statt des eben gefundenen Ausdrucks wegen (39) auch

$$\frac{(n-1)!\,\varkappa}{\gamma}$$

setzen, wobei $\varkappa$ die Zahl der Elemente in der betreffenden Klasse bedeutet. Bei Bildung der Summe aller dieser Ausdrücke ist γ invariant, die Summe aller $\varkappa$ ist aber n^2 und somit ist die gesuchte Anzahl

$$n!\,\frac{n}{\gamma}.$$

Die zuletzt gefundene Zahl läßt sich auf folgendem Wege auch leicht direkt bestimmen: Die Transformationen der Form (37) mit der Nebenbedingung (36) und nur diese haben die Eigenschaft, ein gegebenes reduziertes Quadrat wieder in ein reduziertes zu verwandeln. Wählt man hierbei p und q beliebig, so ist von der Substitution $\mathfrak{u}$ nur ein Element festgelegt, die Anzahl dieser Transformationen ist also

$$n^2(n-1)! = n \cdot n!$$

---

[1]) Vgl. § 4 nach der Tabelle und § 5, Schluß.

und durch Zerlegung ihres Komplexes nach der in ihm enthaltenen Gruppe Γ findet man wieder die obige Zahl.

Von den reduzierten Quadraten gelangt man nun ohne Schwierigkeit zur Gesamtheit aller möglichen Quadrate. Irgendein gegebenes Quadrat kann auf mannigfache Art durch Transformation oder auch durch Umordnung allein auf reduzierte Form gebracht werden. Wir wollen uns auf eine dieser Möglichkeiten, welche unserer Einteilung angepaßt ist, eindeutig festlegen. Diese besteht darin, daß man das Quadrat zuerst der Substitution s_1 unterwirft, wodurch bewirkt wird, daß in der ersten Zeile die Elemente in der natürlichen Anordnung aufeinanderfolgen. Dann halte man diese Zeile fest und stelle durch Vertauschung der übrigen auch bei den Elementen der ersten Spalte die natürliche Reihenfolge her. Die im ganzen ausgeführte Operation ist eine Transformation der Form

$$\mathfrak{s}\,|\,\mathfrak{e}\,|\,\mathfrak{u}, \tag{54}$$

wobei $\mathfrak{s}$ die Eigenschaft hat, die Ziffer 1 ungeändert zu lassen.

Wie man sieht, bleibt bei dieser Reduktion die Gattung des Quadrates erhalten[1]). Jedes Quadrat einer bestimmten Gattung wird auf diese Weise eindeutig zurückgeführt auf ein reduziertes Quadrat derselben. Unterwirft man also umgekehrt jedes der reduzierten Quadrate einer Gattung den $n!(n-1)!$ Transformationen der Form (54), so erhält man sicher alle Quadrate der Gattung. Die entstandenen Quadrate sind aber auch alle verschieden, was unmittelbar klar ist, wenn sie aus demselben reduzierten Quadrat abgeleitet sind, und im andern Fall aus der Eindeutigkeit der obigen Reduktion folgt.

Wir sind so zu einer Unterteilung der Gattung in *Familien* gelangt, deren jede ein einziges reduziertes Quadrat als Repräsentant und die daraus vermöge der Transformationen (54) abgeleiteten, also insgesamt $n!(n-1)!$ Quadrate enthält. Die Zahl der Familien, in welche eine Gattung zerfällt, ist gleich der Anzahl ihrer reduzierten Quadrate. Die den Quadraten einer Familie gemeinsamen Eigenschaften sind invariant gegenüber der Gruppe der Transformationen (54).

Damit ist bewiesen:

Satz 22: Die durch den Typus Q gegebene Klasse von Quadraten zerfällt in soviel Gattungen, als es in Q Klassen ähnlicher Elemente gibt. Von jeder dieser Gattungen erhält man einen Repräsentanten, wenn man der Reihe nach von jeder Klasse ähnlicher Elemente von Q eines durch Umordnung in den Ursprung bringt. Ist Q' einer dieser Repräsentanten, γ die Ordnung seiner Transformationsgruppe, α die Ordnung der Automorphismengruppe der zugehörigen Union und $\varkappa$ die Anzahl der Elemente in der betreffenden Klasse, so enthält die Gattung von Q'

$$\frac{(n-1)!}{\alpha} = \frac{(n-1)!\,\varkappa}{\gamma}$$

reduzierte Quadrate und mit jedem derselben auch die dadurch definierte Familie von $n!(n-1)!$ Quadraten. Die Anzahl der reduzierten Quadrate oder der Familien in der ganzen Klasse ist

$$\frac{n!\,n}{\gamma}.$$

Wir betrachten nun die verschiedenen mit der Klasse des Grundtypus Q koor-

[1]) *Mac Mahon* (Combinatory Analysis I, Cambridge 1915, p. 248) verwendet zur Reduktion Umordnungen, deren erste Komponente 1 ungeändert läßt. Dabei wird man jedoch im allgemeinen zu einer andern Gattung gelangen.

dinierten Klassen. Wegen der in den Gleichungen (15) bis (17) zum Ausdruck kommenden Vertauschbarkeit jeder Operation V aus $\mathfrak{R}$ mit der allgemeinen Transformationsgruppe kann eine solche Klasse auf zwei Arten hergestellt werden, nämlich entweder dadurch, daß man die Quadrate der Klasse von Q der Operation V unterwirft, oder dadurch, daß man die Klasse desjenigen Quadrats bildet, das aus Q vermöge V entsteht.

Zunächst beschränken wir uns auf die Operation R_1. Wendet man diese auf ein reduziertes Quadrat an, so ist das entstehende Quadrat wenigstens teilweise reduziert insofern, als die Elemente seiner ersten Zeile in der natürlichen Anordnung aufeinanderfolgen, dasselbe kann also durch eine Vertauschung der zweiten bis n-ten Zeile in ein reduziertes übergeführt werden. Da nach (16) diese Zeilenvertauschung mit R_1 vertauschbar ist, so kann man aus dem neuen reduzierten Quadrat auf dieselbe Weise wieder das ursprüngliche herstellen. Wir unterwerfen nun alle reduzierten Quadrate aus der Klasse von Q der Operation R_1. Dadurch entstehen nach obigem sicher lauter Quadrate aus der Klasse von Q_1, die wir auf die angegebene Weise in reduzierte verwandeln wollen. Unter diesen reduzierten Quadraten befinden sich nun keine zwei gleichen, denn sonst würden sich die beiden reduzierten Quadrate, aus denen sie abgeleitet sind, nur durch eine Zeilenvertauschung unterscheiden, was offenbar nicht möglich ist. Da aber wegen der Invarianz von γ die Klasse von Q_1 ebensoviele reduzierte Quadrate besitzt, wie diejenige von Q, so hat man damit alle ihre reduzierten Quadrate gefunden. Hiermit ist zugleich eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den reduzierten Quadraten dieser beiden koordinierten Klassen hergestellt. Wenn nun bei zwei Quadraten derselben Gattung die Ziffer 1 im Ursprung steht, so sind sie durch eine Transformation $\bar{s}|t|u$ verbunden, deren drei Komponenten 1 ungeändert lassen. Unterwirft man also beide der Operation R_1, so unterscheiden sich die entstehenden Quadrate nach (16) nur durch die Transformation $\bar{s}|u|t$, welche dieselbe Eigenschaft hat, sie gehören somit ebenfalls der gleichen Gattung an. Daraus folgt, daß bei der eben hergestellten Korrespondenz die Zugehörigkeit zweier reduzierter Quadrate zu der gleichen Gattung erhalten bleibt.

Analoges gilt für die Operation R_2. Bei der Operation R_3 liegen die Verhältnisse sogar noch einfacher, da sie ein reduziertes Quadrat stets wieder in ein reduziertes verwandelt. Die übrigen Operationen von $\mathfrak{R}$ lassen sich aber in der Form R_3R_1 bzw. R_3R_2 darstellen, und darum besteht, wie man sich leicht überzeugt, auch in diesen Fällen eine der obigen analoge Korrespondenz. Wir haben somit

Satz 23: Zwischen den reduzierten Quadraten zweier koordinierter Klassen besteht eine ein-eindeutige im wesentlichen durch eine Operation aus $\mathfrak{R}$ vermittelte Korrespondenz derart, daß Quadraten gleicher Gattung wieder Quadrate gleicher Gattung entsprechen. Insbesondere lassen sich aus den Uniontypen einer Klasse diejenigen einer koordinierten dadurch gewinnen, daß man sie der betreffenden Operation aus $\mathfrak{R}$ und einer unwesentlichen Umordnung unterwirft.

Diesem Satz zufolge ist die Einteilung der Elemente in Klassen bei koordinierten Quadraten zahlenmäßig dieselbe. Dies erkennt man nebenbei auch bequem aus der in § 5 gegebenen räumlichen Deutung. Sind nämlich in Q zwei Elemente ähnlich, so entsprechen ihnen im Würfel zwei ähnliche Teilwürfel. Dann sind aber auch in jeder der übrigen „Projektionen" des Würfels die diesen beiden Teilwürfeln entsprechenden Elemente einander ähnlich.

§ 10. Gruppen.

Tritt zu den Unionpostulaten I bis III (§ 6) noch das assoziative Gesetz hinzu, so wird aus der Union $\mathfrak{F}$ eine Gruppe, die wir mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen wollen. Es ist dann

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{G}, \tag{55}$$

und folglich sind in jedem zugehörigen Quadrat wegen Satz 19* die drei Gruppen Γ_r $(r = 1, 2, 3)$ isomorph mit $\mathfrak{G}$. Wir gehen hier noch ein wenig auf die Frage ein, wohin die andern für Unionen aufgestellten Begriffe und Sätze in diesem Fall führen, und wodurch sich die zu Gruppen gehörigen Quadrate (Gruppentafeln) vor gewöhnlichen lateinischen Quadraten auszeichnen.

Es mögen zunächst solche Eigenschaften der Gruppentafel erwähnt werden, welche mit dem assoziativen Gesetz äquivalent sind. Hierher gehören vor allem die Sätze 20 und 20* [1]). Ist ferner bei einem Quadrat Q einer der Komplexe (20) eine Gruppe oder — was dasselbe bedeutet — sind in einem der Komplexsysteme (20) alle n Komplexe einander gleich, so ist Q eine Gruppentafel, und umgekehrt sind bei einer Tafel der Gruppe $\mathfrak{G}$ die n Komplexe in jedem der Systeme (20) Gruppen und miteinander identisch. Beide Behauptungen folgen mit Berücksichtigung der Gleichungen (5) unmittelbar aus den Sätzen 7 und 20*. Für die Komplexe $\mathfrak{K}_i^s, \overline{\mathfrak{K}}_i^s, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_i^u$ führen wir in diesem Fall die Bezeichnung $\mathfrak{G}^s, \overline{\mathfrak{G}}^s, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}^u$ ein. Dann ist nach Satz 7

$$\begin{cases} \mathfrak{G}^s \equiv \mathfrak{T}_3; & \mathfrak{G}^t \equiv \mathfrak{U}_1; & \mathfrak{G}^u \equiv \mathfrak{S}_2 \\ \overline{\mathfrak{G}}^s \equiv \mathfrak{U}_2; & \overline{\mathfrak{G}}^t \equiv \mathfrak{S}_3; & \overline{\mathfrak{G}}^u \equiv \mathfrak{T}_1 . \end{cases} \tag{56}$$

Diese sechs Gruppen sind nach Satz 20* alle isomorph mit $\mathfrak{G}$ und nach Satz 7 regulär. Sie sind ferner konjugiert, denn nach (18; 1, 2, 3) gilt stets:

$$\mathfrak{T}_1 \equiv s_i^{-1}\,\mathfrak{U}_1 s_i; \quad \mathfrak{U}_2 \equiv t_i^{-1}\mathfrak{S}_2 t_i; \quad \mathfrak{S}_3 \equiv u_i^{-1}\mathfrak{T}_3 u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{57}$$

und außerdem ist hier, wie einfach zu erkennen:

$$\overline{\mathfrak{G}}^s \equiv s_i \mathfrak{G}^s s_i^{-1}; \quad \overline{\mathfrak{G}}^t \equiv t_i \mathfrak{G}^t t_i^{-1}; \quad \overline{\mathfrak{G}}^u \equiv u_i \mathfrak{G}^u u_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{58}$$

Weiterhin ist bekanntlich bei einer Gruppentafel jede Spaltensubstitution mit jeder Zeilensubstitution vertauschbar und zwar sind die Spaltensubstitutionen die einzigen mit dieser Eigenschaft [2]). Dieser Satz erweist sich hier als unmittelbare Folge der Tatsache, daß jede Substitution von $\mathfrak{U}_1$ stets mit jeder von $\mathfrak{U}_2$ vertauschbar ist [3]), oder auch als spezieller Fall von Satz 7a. Wegen Satz 21 haben aber, wenn Q eine Gruppentafel ist, die koordinierten Quadrate gleichfalls die eben genannte Eigenschaft, es ist dann also jede Substitution von $\mathfrak{G}^t$ bzw. $\mathfrak{G}^u$ bzw. $\mathfrak{G}^s$ mit jeder von $\overline{\mathfrak{G}}^s$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}^t$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}^u$ vertauschbar. Ist umgekehrt für je einen festen Wert von p und q z. B. jede Substitution

---

[1]) In der „Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung" von *A. Speiser* fehlte in der ersten Auflage (Berlin 1923; S. 3) die Angabe einer solchen Eigenschaft. Eine von Herrn *H. Brandt* (Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. Ann. **96** (1926), S. 360) angegebene Eigenschaft dieser Art ist in die zweite Auflage (Berlin 1927, S. 14) aufgenommen worden und bringt in etwas anderer Form das in Satz 20 unter b) Gesagte zum Ausdruck. Die Formulierung a) des Satzes 20 hat demgegenüber ebenso wie der allgemeinere Satz 20* den Vorzug, eine Eigenschaft des Gebildes als Ganzes zu erfassen, indem sie seine Invarianz gegenüber einer Gruppe von Operationen betont, welche ohne Bezugnahme auf die Verwendung des Quadrats als Verknüpfungstafel und ohne Bevorzugung irgendeines seiner Elemente definiert ist, ähnlich wie das kommutative Gesetz im reduzierten Quadrat durch die Invarianz bezüglich der Spiegelung an der Hauptdiagonale ausgedrückt werden kann. Die Brandtsche Eigenschaft wurde übrigens in allgemeinerer Form schon von *M. Frolov* unter dem Namen „uniformité rectangulaire" formuliert (Recherches sur les permutations carrées, Journ. de Math. spéc. (3) **4** (1890), p. 11). Frolov nennt, ohne den Begriff der Gruppentafel zu erwähnen, solche Quadrate, die in unserer Redeweise n Umordnungen in sich zulassen, also Gruppentafeln sind, regulär und bemerkt, daß bei ihnen jedes Rechteck aus vier Lettern n-mal mit „ähnlicher" Verteilung der Lettern auftritt.

[2]) Gemeint ist natürlich: innerhalb der symmetrischen Gruppe der n Ziffern $1, 2, \ldots, n$. Vgl. *Burnside*, Theory of groups of finite order (Cambridge 1911), p. 87; *Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1927), S. 124.

[3]) Siehe § 3 nach Gl. (6).

von $\mathfrak{R}_p^u$ mit jeder von $\overline{\mathfrak{R}}_q^t$ vertauschbar, so ist in Q_{23} jede Spaltensubstitution mit jeder Zeilensubstitution vertauschbar, nach Satz 7a gehört also dort jede Spaltensubstitution dem Durchschnitt aller Spaltenkomplexe an, und folglich hat dieser Durchschnitt die Ordnung n, d. h. die Spaltenkomplexe sind alle einander gleich. Wie oben bemerkt wurde, ist dann aber Q eine Gruppentafel.

Eine andere mit dem assoziativen Gesetz äquivalente Eigenschaft wird durch Satz 3 geliefert. Da nämlich in einer Gruppentafel nach Satz 1 gleiche Elemente verwandt sind, so sind dort auch die Komplemente gleicher Elemente direkt bzw. indirekt verwandt, je nachdem ihre Indizessumme gerade oder ungerade ist [1]). Dabei reicht für die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes schon hin, daß diese Eigenschaft bei einer einzigen Serie von n gleichen Elementen von Q vorhanden ist, denn wegen der Umkehrung von Satz 3 folgt daraus sofort $\gamma_3 = n$.

Wir wollen nun die Bedeutung der Übergangsgruppe einer Gruppentafel feststellen. Gehört Q zu einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist nach Satz 4*

$$(59) \qquad \begin{cases} \mathfrak{U} \equiv \overline{\mathfrak{R}}^s \equiv \mathfrak{R}^t \\ \mathfrak{S} \equiv \overline{\mathfrak{R}}^t \equiv \mathfrak{R}^u \\ \mathfrak{T} \equiv \overline{\mathfrak{R}}^u \equiv \mathfrak{R}^s, \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{R}^s$, $\overline{\mathfrak{R}}^s$, ..., $\overline{\mathfrak{R}}^u$ die Normalisatoren von $\mathfrak{G}^s$, $\overline{\mathfrak{G}}^s$, ..., $\overline{\mathfrak{G}}^u$ in der symmetrischen Gruppe der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ bedeuten. Insbesondere ist also die Übergangsgruppe $\mathfrak{U}$ hier nichts anderes als die *Holomorphie* [2]) von $\mathfrak{G}$, welche entsprechend dem Umstand, daß $\mathfrak{U}$ die Normalteiler $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ besitzt, $\mathfrak{G}^t$ und $\overline{\mathfrak{G}}^s$ als Normalteiler enthält. Zwischen den Gruppen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}$ bestehen hier wegen (21) die Beziehungen:

$$(60) \qquad \mathfrak{T} \equiv s_i^{-1} \mathfrak{U} s_i; \quad \mathfrak{U} \equiv t_i^{-1} \mathfrak{S} t_i; \quad \mathfrak{S} \equiv u_i^{-1} \mathfrak{T} u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Verhältnisse werden besonders einfach, wenn man Q als *reduziert* voraussetzt, was für das Folgende geschehen soll. Wegen (31) folgt dann aus (60):

$$(61) \qquad \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{U}.$$

Ferner reduzieren sich, wie aus (57) und (58) hervorgeht, die sechs Gruppen (56) auf zwei wohlbekannte, nämlich die Gruppe der Zeilensubstitutionen, $\mathfrak{G}^s$, und die der Spaltensubstitutionen, $\mathfrak{G}^t$, wobei

$$(62) \qquad \mathfrak{G}^s \equiv \mathfrak{U}_2 \equiv \mathfrak{S}_2 \equiv \mathfrak{T}_3; \quad \mathfrak{G}^t \equiv \mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{S}_3$$

ist. Wegen (57) sind diese beiden Gruppen durch die Relation

$$(63) \qquad \mathfrak{G}^t \equiv u_i^{-1} \mathfrak{G}^s u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

verbunden. Sie bestehen nach (30) aus den Substitutionen

$$(64) \qquad s_i = \begin{pmatrix} i \cdot \nu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \bar{i} \cdot \nu \end{pmatrix}; \quad t_i = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \cdot \bar{i} \\ \nu \end{pmatrix},$$

wo $\bar{i}$ das zu i inverse Element bezeichnet. Aus den Fundamentalrelationen (10) folgt dann:

$$(65) \qquad u_i = \begin{pmatrix} \bar{\nu} \cdot i \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ i \cdot \bar{\nu} \end{pmatrix}.$$

Speziell ist

---

[1]) Die Tatsache, daß diese Eigenschaft in einer Gruppentafel notwendig vorhanden sein muß, hat *Frobenius* in der Abhandlung „Über Gruppencharaktere" erkannt und verwertet (Sitz.-Ber. der preuß. Akad. d. Wiss. 1896, S. 1004).

[2]) Vgl. *Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (1927), S. 123.

$$u_1 = u_1^{-1} = \begin{pmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

und damit erhält man aus (65):

$$u_i = t_i^{-1} u_1 = u_1 s_i^{-1}. \tag{67}$$

Wir betrachten nun die mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ verwandten Unionen. Dieselben sind ebenfalls Gruppen und mit $\mathfrak{G}$ isomorph [1]). Nach Satz 15 gehören nämlich zu je n gleichen Elementen der reduzierten Gruppentafel Q dieselben Übergangssubstitutionen. Da aber $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{G}^s$ auch zu jedem Element p von $\mathfrak{G}$ eine Substitution enthält, welche p durch 1 ersetzt, so gehört zu jedem Element von Q mindestens eine Übergangssubstitution, und somit sind alle Elemente von Q ähnlich. Diese Eigenschaft wird durch Transformation nicht zerstört, folglich gilt die obige Behauptung für jede Gruppentafel. Wir bemerken nebenbei noch, daß je n von den n^2 verwandten Gruppen, nämlich die zu verwandten (gleichen) Elementen gehörigen, identisch sind [2]).

Infolge des Isomorphismus aller verwandten Unionen enthält die durch eine Gruppentafel definierte Klasse lateinischer Quadrate nur eine einzige Gattung. Wegen Satz 21 kann man sogar sagen:

Satz 24: Die durch eine Gruppentafel definierte Grundklasse lateinischer Quadrate besteht aus einer einzigen Gattung.

Daß dieser Satz nicht umkehrbar ist, zeigt nebenstehendes Quadrat sechster Ordnung. Die dadurch definierte Union ist isomorph mit ihren verwandten und koordinierten Unionen und doch keine Gruppe (z. B. ist $(4 \cdot 4) \cdot 4 = 5$, während $4 \cdot (4 \cdot 4) = 6$ ist). (Vgl. § 12, Grundtypus III.)

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	2	1	3
5	4	6	3	2	1
6	5	4	1	3	2

Da in einer Gruppentafel nach (59) jede der beiden Gruppen $\overline{\mathfrak{N}}_1^s$ und $\mathfrak{N}_1^t$, also auch ihr Durchschnitt $\mathfrak{D}_1$ mit $\mathfrak{U}$ identisch ist, so folgt aus Satz 13, daß die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ bei einer reduzierten Gruppentafel gleich $\mathfrak{U}^{(1)}$ ist, d. h. aus denjenigen Substitutionen von $\mathfrak{U}$ besteht, welche 1 ungeändert lassen. Zu jedem der n Elemente p von Q gehört die Übergangssubstitution s_p, denn sie liegt in $\mathfrak{U}$ und ersetzt p durch 1. Die sämtlichen zu diesen Elementen gehörigen Übergangssubstitutionen bilden also nach Satz 15 den Komplex $s_p\mathfrak{A}$. Somit ist

$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{G}^s\mathfrak{A},$$

und ebenso findet man

$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{G}^t\mathfrak{A}.$$

Da ferner $s_p t_q^{-1}$ eine zu $a_{pq} = p \cdot q$ gehörige Übergangssubstitution ist, so ist nach (37)

$$C = s_p \mathfrak{a} \,|\, t_q^{-1} \mathfrak{a} \,|\, s_p t_q^{-1} \mathfrak{a} \tag{68}$$

eine Transformation aus Γ. Läßt man hierin p und q die Werte $1, 2, \ldots, n$ und $\mathfrak{a}$ die Gruppe $\mathfrak{A}$ durchlaufen, so erhält man offenbar alle $n^2\alpha$ Operationen von Γ.

Gemäß (19) und (67) wird das reduzierte Quadrat Q der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Transformation $C^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$ in Q_r übergeführt [3]), wobei

---

[1]) Dies kann auch daraus geschlossen werden, daß $\mathfrak{G}^s$ gegenüber Umordnung invariant und mit $\mathfrak{G}$ isomorph ist.

[2]) Vgl. § 8, Schluß (S. 210). Dies ist nur ein anderer Ausdruck für die Frolovsche „uniformité rectangulaire“ (S. 214 Anmerkung [1])).

[3]) Q_1 und Q_2 sind dabei 1-normiert (vgl. S. 200).

(69) $$C^{(1)} = u_1|\mathfrak{e}|\mathfrak{e}; \quad C^{(2)} = \mathfrak{e}|u_1|\mathfrak{e}; \quad C^{(3)} = u_1|u_1|u_1$$

ist. Q besitzt somit die uneigentlichen Transformationen in sich: $C^{(r)}R_r$. Diese erzeugen eine zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Gruppe P, die außer ihnen selbst und dem Einheitselement noch die beiden Operationen

$$C^{(1)}R_1C^{(3)}R_3 = (\mathfrak{e}\,|\,u_1|\,u_1)\,R_1R_3; \quad C^{(2)}R_2C^{(3)}R_3 = (u_1\,|\,\mathfrak{e}|\,u_1)\,R_2R_3$$

enthält. Die Transformationsgruppe Γ von Q läßt sich durch P zu einer Gruppe Γ' erweitern, welche Γ als Normalteiler vom Index 6 enthält [1]). Da u_1 die Ziffer 1 ungeändert läßt, so kann Q vermöge unwesentlicher Umordnung in Q_1 und in Q_2 übergeführt werden. Daraus folgt, daß diese drei Quadrate Gruppentafeln ein- und derselben Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, während die anderen drei koordinierten Quadrate zu einer mit $\mathfrak{G}$ isomorphen Gruppe gehören, welche aus $\mathfrak{G}$ dadurch entsteht, daß man bei je zwei zueinander inversen Elementen die Bezeichnung vertauscht. Unterwirft man Q der Transformation $(\mathfrak{e}\,|\,\mathfrak{e}|\,u_1)$, so entsteht ein Quadrat, bei dem entsprechende Substitutionen in den drei Fundamentalsystemen einander gleich sind, bei dem sich also die Anzahl der verschiedenen koordinierten Quadrate im allgemeinen auf zwei, wenn $\mathfrak{G}$ Abelsch ist, sogar auf eins reduziert [2]).

Nach Satz 8 läßt sich Γ auch durch $C^{(3)}R_3$ allein erweitern, wodurch die Gruppe Γ^* der Ordnung 2γ entsteht. u_1 ist dann im Sinne des § 5 eine uneigentliche Übergangssubstitution. Ist u_1 noch nicht in $\mathfrak{U}$ enthalten, so erfährt dabei nach Satz 9 auch $\mathfrak{U}$ eine entsprechende Erweiterung, und die erweiterte Gruppe $\mathfrak{U}^*$ ist hier mit dem sog. Doppelholomorph von $\mathfrak{G}$ identisch [3]). Aus Satz 10 folgt ferner, daß u_1 dann und nur dann in $\mathfrak{U}$ enthalten, d. h. $\mathfrak{U}^*$ mit $\mathfrak{U}$ identisch ist, wenn $\mathfrak{G}$ Abelsch ist. Die Umordnungsgruppe Ω_3 erfährt in diesem Fall ebenfalls eine Erweiterung, nämlich durch R_3, und enthält nur Umordnungen mit inversen Komponenten.

Da $C^{(3)}R_3$ eine Operation zweiter Ordnung ist, so ist nach Satz 11 u_1 eine Symmetriesubstitution von Q. Sie ist nach Satz 12 sogar Normalsubstitution und zwar die zu dem Element 1 gehörige. Auch zu jedem der $n-1$ übrigen Elemente von $\mathfrak{G}$ gehört eine Normalsubstitution. Aus (68) folgt nämlich, daß

$$(u_1 s_{\bar{k}}\,|\,u_1 t_k\,|\,u_1 s_{\bar{k}} t_k)\,R_3$$

eine uneigentiche Transformation von Q in sich ist und zwar für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$. Nach (67) ist diese Operation aber identisch mit

$$(u_k\,|\,u_k^{-1}\,|\,u_1 s_k^{-1} t_k)\,R_3.$$

Nach Satz 12 gehört somit zu dem Element k von $\mathfrak{G}$ die Normalsubstitution

$$\mathfrak{x}_k = u_1 s_k^{-1} t_k = u_k t_k = u_k^{-1} s_k^{-1} = s_k u_1 s_k^{-1} = t_k^{-1} u_1 t_k = \begin{pmatrix} \nu \\ k \cdot \bar{\nu} \cdot k \end{pmatrix}.$$

Eine Gruppentafel besitzt demnach die Maximalzahl n von Normalsubstitutionen. Ein Quadrat mit n Normalsubstitutionen braucht jedoch keine Gruppentafel zu sein, wie nebenstehendes Beispiel zeigt. Die acht Normalsubstitutionen sind hier:

$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{e}; \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_4 = (57)\,(68); \quad \mathfrak{x}_5 = \mathfrak{x}_6 = \mathfrak{x}_7 = \mathfrak{x}_8 = (24).$

Die durch dieses Quadrat definierte Union ist aber keine Gruppe (z. B. ist $(4 \cdot 5) \cdot 6 = 3$, während $4 \cdot (5 \cdot 6) = 1$ ist).

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	4	3	2
6	5	8	7	4	1	2	3
7	8	5	6	3	2	1	4
8	7	6	5	2	3	4	1

[1]) Vgl. § 5, Schluß.
[2]) Vgl. § 4, Fall b) und c).
[3]) *Miller, Blichfeldt, Dickson*, Finite groups (1916), p. 46.

III. Spezieller Teil: Die lateinischen Quadrate und Unionen der Ordnungen fünf und sechs.

§ 11. Einleitung und der Fall $n = 5$.

Bekanntlich sind alle Quadrate, deren Ordnung kleiner als 5 ist, Gruppentafeln, das heißt: die Unionen erster bis vierter Ordnung sind Gruppen. Von der ersten bis dritten Ordnung gibt es je nur ein einziges reduziertes Quadrat, von der vierten Ordnung im ganzen vier, von denen drei zur zyklischen Gruppe und eines zur Vierergruppe gehört. *Cayley* [1]) fand durch Abzählung der Möglichkeiten, die zweite Zeile und die folgenden zu besetzen, für die Gesamtzahl der verschiedenen reduzierten Quadrate fünfter Ordnung den Wert 56. Dieselbe Zahl veröffentlichte im gleichen Jahr ohne Beweis *M. Frolov* [2]), der zugleich — ebenfalls ohne Beweis — für $n = 6$ die Zahl 9408 und für $n = 7$ die Zahl 221276160 nennt.

Eine allgemeine bei größerem n allerdings mühsame Methode der Anzahlbestimmung mit Hilfe von symmetrischen Funktionen ist von *P. A. Mac Mahon* [3]) angegeben worden. Ich habe diese Methode auf die Fälle $n = 5$ und $n = 6$ angewendet und die obigen Zahlen bestätigt gefunden, dagegen steht eine Prüfung des *Frolov*schen Ergebnisses für $n = 7$ noch aus.

Die Zahl 9408 für den Fall $n = 6$ wird auch von *G. Tarry* [4]) angegeben, der sich mit der Aufstellung der Quadrate sechster Ordnung zu dem Zwecke befaßt, die Unlösbarkeit des Eulerschen Problems der 36 Offiziere zu beweisen. Er vereinigt in einer „famille" alle in unserem Sinne ähnlichen Quadrate samt den dazu symmetrischen und zeigt, daß es insgesamt 17 solcher „familles" gibt [5]). Die derselben „famille" angehörigen Quadrate werden „semblables" genannt und aus jeder „famille" wird ein Quadrat als ihr „type" ausgewählt. Die Entscheidung, welcher „famille" ein vorgelegtes Quadrat angehört, wird dabei durch Betrachtung seines „écusson" herbeigeführt, eines Schemas, welches den Charakter der in den verschiedenen Zeilen- und Spaltenkomplexen des Quadrats enthaltenen Substitutionen zu erkennen gibt, und auf welchem die Einteilung in die 17 „familles" aufgebaut ist.

Wir klassifizieren im folgenden die lateinischen Quadrate fünfter und sechster Ordnung im Sinne des § 9, wobei die schon im voraus bekannte Gesamtzahl der ver-

---

[1]) *A. Cayley*, On latin squares, Mess. of Math. **19** (1890), p. 135—137 = Coll. Pap. **13** (1897), p. 55—57.

[2]) *M. Frolov*, Recherches sur les permutations carrées, Journ. de Math. spéc. (Longchamps) (3) **4** (1890), p. 8—11; 25—30. Frolov gibt an, die Zahlen für $n \leqq 6$ auf direktem Wege (offenbar ähnlich wie Cayley) gefunden zu haben, während ihm die Bestimmung im Fall $n = 7$ nur durch besondere Methoden gelungen sei, welche aber nicht näher erläutert werden.

[3]) *P. A. Mac Mahon*, A new method in combinatory analysis with application to latin squares and associated questions, Trans. Cambr. Phil. Soc. **16** (1898), p. 262—290. Vgl. auch: Combinatory Analysis I (Cambridge 1915), Sect. V, Chap. III. Die Anzahlen für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ finden sich auf S. 250. Bei $n = 5$ steht dort irrtümlicherweise an Stelle von 56 die Zahl 52. Eine andere Methode wird in Band II dieses Werkes (1916), Sect. XI, Chap. V erläutert. Beide Methoden werden auch auf allgemeinere Gebilde, z. B. lateinische Rechtecke, angewandt.

[4]) *G. Tarry*, Le problème des 36 officiers, Assoc. Franç. pour l'avanc. des sc. 29e session (Paris 1900) **I** (1900), p. 122—123; **II** (1901), p. 170—203; spez. **II**, p. 171.

[5]) Eine Zusammenstellung der die 17 „familles" repräsentierenden „types" findet sich auch in folgenden beiden schon vorher veröffentlichten Auszügen aus der obigen Abhandlung: Sur le problème d'Euler des 36 officiers, L'intermédiaire des Math. (1) **7** (1900), p. 14—16. Les permutations carrées de base 6, Mathesis (2) **10** (1900), Suppl. p. 23—30. (Extrait des Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liège (3) **2** (1900).)

Nach einer Angabe *Schumachers* (Briefw. Gauß-Schumacher, herausgeg. von Peters, **IV** (1862), S. 81) hat schon *Clausen* die Quadrate sechster Ordnung auf 17 Grundformen gebracht, und zwar zu demselben Zweck, wie später *Tarry*. Die Clausensche Arbeit ist jedoch nicht veröffentlicht worden.

schiedenen reduzierten Quadrate (Familien) eine Probe für die Vollständigkeit der Aufzählung liefert. Vermöge der Unterteilung der Klassen in Gattungen ergeben sich zugleich die verschiedenen Typen von Unionen dieser beiden Ordnungen. Es zeigt sich, daß die Quadrate der fünften Ordnung nur zwei Klassen bilden, von denen die eine aus den Gruppentafeln der zyklischen Gruppe besteht, während die andere fünf verschiedene Gattungen enthält [1]). Die Quadrate sechster Ordnung zerfallen in zwölf Grundklassen, von denen sieben — darunter die zwei zu den beiden Gruppen gehörigen — aus einer einzigen Klasse, die übrigen aus je drei Klassen bestehen, sodaß sich die Gesamtzahl von 22 Klassen ergibt. Diese Klassen enthalten zusammen 109 Gattungen, es gibt also außer den beiden Gruppen noch 107 verschiedene Typen von Unionen sechster Ordnung. Vereinigt man in den fünf dreiklassigen Grundklassen jedesmal diejenigen beiden Klassen, von denen die eine die zu den Quadraten der andern symmetrischen Quadrate enthält, so reduzieren sich die 22 Klassen auf die 17 Tarryschen „familles".

Wir behandeln nun den Fall $n = 5$. Die Gesamtheit der Quadrate fünfter Ordnung zerfällt, da es darunter 56 verschiedene reduzierte Quadrate gibt, in 56 Familien. Diese verteilen sich nach dem Schema $6 + 2 + 8 + 8 + 8 + 24$ auf sechs Gattungen und die letzteren nach dem Schema $1 + 5$ auf zwei Klassen, von denen jede mit ihrer Grundklasse identisch ist.

Wir beginnen mit einer Gruppentafel der zyklischen Gruppe fünfter Ordnung, dem nebenstehenden Grundtypus I. Nach Satz 24 besteht die durch dieses Quadrat definierte Grundklasse nur aus einer einzigen Klasse und auch diese nur aus einer einzigen Gattung. Wir wählen dasselbe Quadrat zugleich als Repräsentant der Grundklasse I, der Klasse I und der Gattung I. Da die Automorphismengruppe der zyklischen Gruppe von der Ordnung 4 ist, so besteht die Gattung I nach Satz 22 aus sechs Familien.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Grundtypus I.
Typus I.
Uniontypus I.

Über diejenigen Quadrate, welche keine Gruppentafeln sind, läßt sich zunächst allgemein aussagen, daß die Zahlen γ_r $(r = 1, 2, 3)$ alle den Wert 1 haben müssen, denn nach Satz 7 sind sie Teiler von 5. Insbesondere besitzen diese Quadrate also außer der identischen keine Umordnung in sich. Wir konstruieren nun ein reduziertes Quadrat, in dessen Hauptdiagonale nur das Element 1 vertreten ist. Die Ausfüllung der übrigen Felder ist außerordentlich einfach und nur auf zwei Arten möglich, von denen wir die eine auszeichnen, indem wir das betreffende Quadrat als Grundtypus II, d. h. als Vertreter der Grundklasse II erwählen. Da dieses Quadrat die uneigentlichen Transformationen in sich:

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1

Grundtypus II.
Typus II.
Uniontypus IIa.

$$((45) \mid (45) \mid (45))\, R_r \qquad (r = 1, 2, 3)$$

besitzt, so besteht auch die Grundklasse II nur aus der einzigen Klasse II, welche wir durch dasselbe Quadrat repräsentieren. Unter den koordinierten Quadraten gibt es nur zwei verschiedene, Q und Q_3, denn auch die Operation $R_2 R_3$ führt Q in sich über, und folglich ist $s_i = t_i = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ [2]).

---

[1]) Diese Tatsache habe ich schon 1927 in einem Vortrag auf dem 4. Deutsch. Math.-Tag in Bad Kissingen erwähnt (Jahresber. der D. M.-V. **37** (1928), S. 19). An Stelle des damals gebrauchten Ausdrucks „Schar" habe ich inzwischen das Wort „Union" gesetzt, welches weniger oft zur Bezeichnung anderer Begriffe verwendet worden ist. Aus ähnlichem Grunde habe ich das damalige „adjungiert" durch „verwandt" ersetzt.

[2]) Vgl. § 4, Fall b) (S. 193).

Wir wollen nun die Transformationsgruppe dieses Quadrats bestimmen. Der erste Zeilenkomplex $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ besteht aus den Substitutionen:

$$s_1^{-1} = \mathfrak{e}; \quad s_2^{-1} = (12)\,(345); \quad s_3^{-1} = (13)\,(254); \quad s_4^{-1} = (14)\,(235); \quad s_5^{-1} = (15)\,(243)$$

und geht bei Transformation mit (45) in den ersten Spaltenkomplex $\mathfrak{R}_1^t$ über. Man stellt ferner leicht fest, daß $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ mit keinem der übrigen Zeilenkomplexe konjugiert ist. Dann kann aber auch $\mathfrak{R}_1^t$ mit keinem der übrigen Spaltenkomplexe konjugiert sein, denn $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ und $\mathfrak{R}_1^t$ wurden soeben als konjugiert erkannt. Nach Satz 4 ist also keine Zeile (Spalte) der ersten Zeile (Spalte) ähnlich, und die Klasse von a_{11} besteht aus a_{11} allein. Mit $\varkappa = \varkappa^s = \varkappa^t = 1$ und $\gamma_3 = 1$ folgt deshalb aus den Gleichungen (38) und (40):

$$u = \alpha = n_1^s = n_1^t$$

und folglich auch

$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{A} \equiv \overline{\mathfrak{R}}_1^s = \mathfrak{R}_1^t.$$

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ kann aber als Normalisator von $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ in der symmetrischen Gruppe der Ziffern 2, 3, 4, 5 bestimmt werden. Man sieht nun leicht, daß $\overline{\mathfrak{R}}_1^s$ mit (234) und mit (23) (45), aber nicht mit (2345) vertauschbar ist. $\mathfrak{A}$ ist also mit der alternierenden Gruppe der Ziffern 2, 3, 4, 5 identisch und demnach von der Ordnung 12. Da hier u und wegen (39) auch γ denselben Wert hat [1]), so ist nach Satz 22 die Anzahl der Familien in der Klasse II gleich 50. Mit Einschluß der obigen sechs Familien aus der Klasse I ist hiermit die Gesamtzahl 56 schon erreicht, es sind also bereits alle Klassen von Quadraten fünfter Ordnung aufgezählt.

Es handelt sich jetzt noch darum, die in der Klasse II vereinigten Gattungen und damit die verschiedenen Typen von Unionen fünfter Ordnung zu bestimmen. Wir bezeichnen den Typus II als Uniontypus aufgefaßt mit II a, als Vertreter der Gattung II a. Die zugehörige Union sei $\mathfrak{F}_a$. Durch einfache Operationen stellen wir dann aus II a vier weitere Quadrate derselben Klasse her. Zunächst gelangt man durch eine Umordnung, welche das Element 1 der zweiten Zeile in den Ursprung führt, von II a zu II b. Aus II b entsteht durch Anwendung von R_1 und anschließende unwesentliche Umordnung II c und hieraus vermöge R_3 das Quadrat II d. Führt man schließlich noch durch Umordnung das Element 1 der dritten Zeile von II d in den Ursprung, so gelangt man zu II e.

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	4	2	5	1
4	5	1	2	3
5	3	4	1	2

Uniontypus II b.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	1	2
4	5	2	3	1
5	3	1	2	4

Uniontypus II c.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	2	1
4	5	1	3	2
5	3	2	1	4

Uniontypus II d.

Die zu diesen vier Quadraten gehörigen Unionen $\mathfrak{F}_b\mathfrak{F}_c\mathfrak{F}_d\mathfrak{F}_e$ sind weder unter sich noch mit $\mathfrak{F}_a$ isomorph. $\mathfrak{F}_a$ besitzt nämlich lauter Elemente zweiter Ordnung, $\mathfrak{F}_e$ gar keines und die übrigen drei Unionen je nur ein einziges. In $\mathfrak{F}_b$ sind die zweiten Potenzen der Elemente 3, 4, 5 einander gleich, in $\mathfrak{F}_c$ und $\mathfrak{F}_d$ dagegen nicht. Schließlich haben die Elemente 3, 4, 5 in $\mathfrak{F}_c$ die linke Ordnung 5 und die rechte Ordnung 3, während es in $\mathfrak{F}_d$ gerade umgekehrt ist. Die Unionen $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{F}_e$ zeichnen sich nebenbei dadurch aus, daß die linke und rechte Ordnung bei jedem ihrer Elemente einander gleich sind.

[1]) Es ist $\Gamma \equiv \mathsf{A}$ (Satz 14) und somit $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{U}$.

Nachdem hiermit die Gattungen II a bis II e als voneinander verschieden erkannt sind, weisen wir noch nach, daß sie die einzigen aus der Klasse II sind. Nach Satz 22 ist die Anzahl der Familien in der Gattung II a gleich 2. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}_b$ durch (345) erzeugt wird, also von der dritten Ordnung ist. Da aber II b, II c, und II d koordiniert sind, so ist dies nach Satz 14 zugleich auch die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}_c$ und $\mathfrak{F}_d$. Jede dieser drei Gattungen enthält somit 8 Familien. Die Gattung II e schließlich umfaßt 24 Familien, denn die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}_e$ besteht aus der identischen Substitution allein. Hiermit ist die Gesamtzahl 50 der in der Klasse II enthaltenen Familien erreicht, weitere Gattungen können also in dieser Klasse nicht existieren.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	5	2	1	4
4	1	5	3	2
5	4	1	2	3

Uniontypus II e.

a	d	d	d	d
c	b	e	e	e
c	e	b	e	e
c	e	e	b	e
c	e	e	e	b

Gattungsschema der Klasse II.

Wir fügen zum Schluß noch das „Gattungsschema" der Klasse II bei, aus dem zu ersehen ist, von welchem Typus die mit $\mathfrak{F}_a$ verwandten Unionen $\mathfrak{F}_{pq}$ sind[1]). Da $(n-1)!/\gamma$ hier den Wert 2 hat, so muß in diesem Schema nach Satz 22 jede der fünf Gattungen halb so oft auftreten, als die Anzahl ihrer Familien angibt

§ 12. Der Fall $n = 6$.

Wir stellen hier nur die Ergebnisse der Einteilung zusammen. Die Gruppen, welche dabei eine Rolle spielen, werden durch ihre Erzeugenden (in geschweiften Klammern) gekennzeichnet. Die Übergangsgruppe wird jeweils nur für den Grundtypus angegeben, und von der zugehörigen Transformationsgruppe wird nur die Ordnung γ genannt. Wie schon oben bemerkt wurde, gibt es 12 Grundklassen, von denen 7 einklassig, die übrigen dreiklassig sind. Die Reduktion der Anzahl der Klassen innerhalb der Grundklassen auf eins bzw. drei wird durch Angabe uneigentlicher Transformationen des betreffenden Grundtypus in sich begründet. Nur bei den Grundklassen I und II, welche zu den beiden Gruppen sechster Ordnung gehören, ist diese Begründung im Hinblick auf Satz 24 weggelassen.

A) Einklassige Grundklassen.

I. Grundklasse der zyklischen Gruppe.

$$\mathfrak{A} \equiv \{(26)\,(35)\}; \quad \alpha = 2.$$
$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{G}^s\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G}^t\mathfrak{A}; \quad u = 12.$$
$$\gamma_r = 6 \quad (r = 1, 2, 3).$$
$$\gamma = 72.$$

Anzahl der Familien: 60.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

Grundtypus I.
Typus I. Uniontypus I.

II. Grundklasse der Diedergruppe.

$$\mathfrak{A} \equiv \{(23)\,(56),\,(234)\}; \quad \alpha = 6.$$
$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{G}^s\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G}^t\mathfrak{A}; \quad u = 36.$$
$$\gamma_r = 6 \ (r = 1, 2, 3).$$
$$\gamma = 216.$$

Anzahl der Familien: 20.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	1	5	4	2
4	5	6	1	2	3
5	4	2	3	6	1
6	3	4	2	1	5

Grundtypus II.
Typus II.
Uniontypus II.

[1]) Vgl. S. 208, oben.

III. Grundklasse.

Uneigentliche Transformationen in sich:

$((46) \mid (23)\,(56) \mid (23)\,(56))\ R_1$
$((56) \mid (56) \mid (56))\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(456)\}$; $\alpha = 3$.
$\mathfrak{U} \equiv \{(14)\,(25)\,(36),\ (142635)\}\,\mathfrak{A}$; $u = 36$.
$\Omega_3 \equiv \{(132)\,(456) \mid (123)\,(456)\}$; $\gamma_3 = 3$.
$\gamma = 108$.

Anzahl der Familien: **40**.

Die Klasse III enthält nur *eine* Gattung.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	2	1	3
5	4	6	3	2	1
6	5	4	1	3	2

Grundtypus III.
Typus III.
Uniontypus III.

IV. Grundklasse.

Uneigentliche Transformationen in sich:

$((36)\,(45) \mid (34)\,(56) \mid (34)\,(56))\ R_1$
$(\ e \mid e \mid e\ )\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(45)\,(36)\}$; $\alpha = 2$.
$\mathfrak{U} \equiv \{(135246)\}\mathfrak{A}$; $u = 12$.
$\Omega_3 \equiv \{(12)\,(34)\,(56) \mid (12)\,(34)\,(56)\}$; $\gamma_3 = 2$.
$\gamma = 24$.

Anzahl der Familien: **180**.

Die Klasse IV enthält *zwei* Gattungen.

	$\mathfrak{A}$	α	Familien
Gattung IV a	$\{(45)\,(36)\}$	2	60
Gattung IV b	$\{\ e\ \}$	1	120
			180.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3
6	5	2	1	3	4

Grundtypus IV.
Typus IV.
Uniontypus IV a.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	2	1	4	3
6	5	1	2	3	4

Uniontypus IV b.

a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	b	b
b	b	a	a	b	b
b	b	a	a	b	b
b	b	b	b	a	a
b	b	b	b	a	a

Gattungsschema der Klasse IV.

V. Grundklasse.

Uneigentliche Transformationen in sich:

$((56) \mid (45)\,(36) \mid (45)\,(36))\ R_1$
$((56) \mid (56) \mid (56))\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(34)\,(56)\}$; $\alpha = 2$.
$\mathfrak{U} \equiv \{(12)\,(35)\,(46)\}\,\mathfrak{A}$; $u = 4$.
$\Omega_3 \equiv \{(12)\,(36)\,(45) \mid (12)\,(35)\,(46)\}$; $\gamma_3 = 2$.
$\gamma = 8$.

Anzahl der Familien: **540**.

Die Klasse V enthält *fünf* Gattungen.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	2	5	4	1
4	5	6	2	1	3
5	4	1	3	6	2
6	3	4	1	2	5

Grundtypus V.
Typus V.
Uniontypus V a.

Gattung	$\mathfrak{A}$	α	Familien
V a	$\{(34)\,(56)\}$	2	60
V b	$\{e\}$	1	120
V c	$\{e\}$	1	120
V d	$\{e\}$	1	120
V e	$\{e\}$	1	120
			540

a	a	e	e	e	e
a	a	e	e	e	e
d	d	c	b	b	c
d	d	b	c	c	b
d	d	c	b	b	c
d	d	b	c	c	b

Gattungsschema der Klasse V.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	5	1	6	2	4
4	6	5	1	3	2
5	3	6	2	4	1
6	4	2	3	1	5

Uniontypus V b.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	2	4
4	6	2	5	1	3
5	3	6	2	4	1
6	4	5	1	3	2

Uniontypus V c.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	1	2	6	5
4	3	6	5	1	2
5	6	4	3	2	1
6	5	2	1	4	3

$\times$

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	4	2
4	6	2	5	3	1
5	3	6	1	2	4
6	4	5	2	1	3

[1])

Uniontypus V d.

Uniontypus V e.

VI. Grundklasse.

Uneigentliche Transformationen in sich:

$((46)\,|\,(12)\,(46)\,|\,(12)\,(46))\;R_1$
$((36)\,|\quad(36)\quad|\quad(36)\quad)\;R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{e\}$; $\alpha = 1$.
$\mathfrak{U} \equiv \{(15)\,(36),\,(16)\,(24)\,(35)\}$; $u = 4$.
$\Omega_3 \equiv \{e\,|\,e\}$; $\gamma_3 = 1$.
$\gamma = 4$.

Anzahl der Familien: **1080**.

Die Klasse VI enthält *neun* Gattungen.

Jede der neun Gattungen VI a bis VI i enthält, da die Automorphismengruppe in den betreffenden Uniontypen durchweg die Ordnung 1 hat, 120 Familien.
$9 \times 120 = 1080$.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	6	2	1	4	5
4	5	6	2	3	1
5	3	1	6	2	4
6	4	5	3	1	2

Grundtypus VI.
Typus VI.
Uniontypus VI a.

a	e	f	e	f	a
d	b	c	i	h	g
a	f	e	f	e	a
d	h	i	c	b	g
g	i	h	b	c	d
g	c	b	h	i	d

Gattungsschema der Klasse VI.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	2	6	1	5
4	6	5	3	2	1
5	3	6	1	4	2
6	5	1	2	3	4

Uniontypus VI b.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5
3	6	2	5	1	4
4	5	6	2	3	1
5	4	1	6	2	3
6	1	5	3	4	2

Uniontypus VI c.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	5	6	2	1
4	6	1	2	3	5
5	3	6	1	4	2
6	5	2	3	1	4

$\times$

1	2	3	4	5	6
2	1	4	6	3	5
3	4	5	1	6	2
4	5	6	2	1	3
5	6	2	3	4	1
6	3	1	5	2	4

Uniontypus VI d.

Uniontypus VI e.

[1]) Das Zeichen $\times$ zwischen zwei Uniontypen soll andeuten, daß die beiden zueinander symmetrisch sind.

1	2	3	4	5	6
2	5	4	6	3	1
3	1	5	2	6	4
4	6	2	3	1	5
5	4	6	1	2	3
6	3	1	5	4	2

×

1	2	3	4	5	6
2	5	1	6	4	3
3	4	5	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	3	6	1	2	4
6	1	4	5	3	2

Uniontypus VIf.

Uniontypus VIg.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	6	5	2	1	4
4	1	2	6	3	5
5	4	6	1	2	3
6	5	1	3	4	2

×

1	2	3	4	5	6
2	3	6	1	4	5
3	4	5	2	6	1
4	5	2	6	1	3
5	6	1	3	2	4
6	1	4	5	3	2

Uniontypus VIh.

Uniontypus VIi.

VII. Grundklasse.

Uneigentliche Transformationen in sich:

$((56) \mid (56) \mid (56))\ R_1$
$((45) \mid (45) \mid (45))\ R_3$.
$\mathfrak{A} \equiv \{(35)\,(46),\ (34)\,(56)\}$; $\alpha = 4$.
$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{A}$; $u = 4$.
$\Omega_3 \equiv \{e \mid e\}$; $\gamma_3 = 1$.
$\gamma = 4$.

Anzahl der Familien: **1080**.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	4	2
4	6	5	1	2	3
5	3	6	2	1	4
6	4	2	5	3	1

Grundtypus VII.
Typus VII.
Uniontypus VIIa.

Die Klasse VII enthält *zwölf* Gattungen.

a	c	f	f	f	f
d	b	h	h	h	h
e	g	l	i	k	m
e	g	i	l	m	k
e	g	k	m	l	i
e	g	m	k	i	l

Gattungsschema der Klasse VII.

Die Automorphismengruppe der Uniontypen VII a, b, c, d ist obige Gruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung 4, während diejenige der übrigen acht Uniontypen aus der identischen Substitution besteht. Die Gattungen VII a bis d enthalten somit je 30, die Gattungen VII e bis m je 120 Familien. $4 \times 30 + 8 \times 120 = 1080$.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	2	6	4	1
4	6	5	2	1	3
5	3	6	1	2	4
6	4	1	5	3	2

Uniontypus VIIb.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	4	5	1	2
4	5	6	3	2	1
5	4	1	2	6	3
6	3	2	1	4	5

Uniontypus VIIc.

×

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	4	3
3	5	4	6	1	2
4	6	5	3	2	1
5	3	1	2	6	4
6	4	2	1	3	5

Uniontypus VIId.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	4	1	5	6	2
4	3	6	2	1	5
5	6	4	3	2	1
6	5	2	1	3	4

Uniontypus VIIe.

×

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	4	2
4	6	5	2	3	1
5	4	6	1	2	3
6	3	2	5	1	4

Uniontypus VIIf.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	5	2	6	1	4
4	6	5	3	2	1
5	3	6	1	4	2
6	4	1	2	3	5

Uniontypus VIIg.

×

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	2	5	6	1
4	5	6	3	1	2
5	6	1	2	4	3
6	3	4	1	2	5

Uniontypus VIIh.

1	2	3	4	5	6
2	5	6	1	4	3
3	4	5	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	3	1	6	2	4
6	1	4	5	3	2

Uniontypus VIIi.

×

1	2	3	4	5	6
2	5	4	6	3	1
3	6	5	2	1	4
4	1	2	3	6	5
5	4	6	1	2	3
6	3	1	5	4	2

Uniontypus VIIk.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	6	1	2	4	5
4	3	5	6	2	1
5	4	2	1	6	3
6	5	4	3	1	2

Uniontypus VIIl.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	3	6	4
3	6	2	5	4	1
4	3	6	2	1	5
5	4	1	6	3	2
6	5	4	1	2	3

Uniontypus VIIm.

B. Dreiklassige Grundklassen. [1])

VIII. Grundklasse.

Uneigentliche Transformation in sich:

$(e \mid e \mid e)\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(25436),\ (3546)\}$; $\alpha = 20$.

$\mathfrak{U} \equiv \{(23)\,(456)\}\mathfrak{A}$; $u = 120$

(symmetrische Gruppe der Ziffern 2, 3, 4, 5, 6).

$\Omega_3 \equiv \{e \mid e\}$; $\gamma_3 = 1$; $\gamma = 120$.

Anzahl der Familien: $\boxed{3 \times 36 = 108}$.

Jede der drei Klassen enthält zwei Gattungen, die Grundklasse VIII also *sechs* Gattungen.

Gattung	$\mathfrak{A}$	α	Familien
a	{(25436), (3546)}	20	6
b	{(3546)}	4	30
			36

Die Umordnungsgruppe hat auch bei den Klassen VIII′ und VIII″ die Ordnung 1.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	6	1	2	4	5
4	5	2	1	6	3
5	3	4	6	1	2
6	4	5	3	2	1

Grundtypus VIII.
Typus VIII.
Uniontypus VIII a.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	6	4	5	1	2
4	5	6	3	2	1
5	3	2	1	6	4
6	4	1	2	3	5

Uniontypus VIII b.

a	b	b	b	b	b
b	a	b	b	b	b
b	b	a	b	b	b
b	b	b	a	b	b
b	b	b	b	a	b
b	b	b	b	b	a

Gattungsschema der Klasse VIII.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	4	1	5	6	2
4	3	6	1	2	5
5	6	2	3	1	4
6	5	4	2	3	1

Typus VIII′.
Uniontypus VIII′ a.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	4	5	2	6	1
4	3	2	6	1	5
5	6	1	3	4	2
6	5	4	1	2	3

Uniontypus VIII′ b.

a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	b	b

Gattungsschema der Klasse VIII′.

IX. Grundklasse.

Uneigentliche Transformation in sich:

$(e \mid e \mid e)\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(23)\,(56)\}$; $\alpha = 2$.

$\mathfrak{U} \equiv \{(123)\,(56)\}\mathfrak{A}$; $u = 12$.

$\Omega_3 \equiv \{(123)\,(465) \mid (132)\,(456)\}$; $\gamma_3 = 3$.

$\gamma = 36$.

Anzahl der Familien: $\boxed{3 \times 120 = 360}$.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	1	2	5	6	4
4	6	5	1	2	3
5	4	6	2	3	1
6	5	4	3	1	2

Grundtypus IX.
Typus IX.
Uniontypus IX a.

---

[1]) Die drei in einer Grundklasse K enthaltenen Klassen sind mit K, K' und K'' bezeichnet. Aus den Uniontypen der Klasse K erhält man vermöge R_1 und unwesentlicher Umordnung diejenigen der Klasse K', aus denen

Jede der drei Klassen enthält drei Gattungen, die Grundklasse IX also *neun* Gattungen.

Gattung	$\mathfrak{A}$	α	Familien
a	{(23) (56)}	2	60
b	{(23) (56), (456)}	6	20
c	{(456)}	3	40
			120

Bei den Klassen IX′ und IX″ hat die Umordnungsgruppe die Ordnung 1.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	1	2	3
5	4	6	3	1	2
6	5	4	2	3	1

Uniontypus IXb.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	2	3	1
5	4	6	1	2	3
6	5	4	3	1	2

Uniontypus IXc.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	1	2	5	6	4
4	5	6	1	3	2
5	6	4	3	2	1
6	4	5	2	1	3

Typus IX′.
Uniontypus IX′a.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	5	6	1	3	2
5	6	4	2	1	3
6	4	5	3	2	1

Uniontypus IX′b.

a	a	a	b	c	c
a	a	a	c	b	c
a	a	a	c	c	b
b	c	c	a	a	a
c	b	c	a	a	a
c	c	b	a	a	a

Gattungsschema der Klasse IX.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	5	6	2	1	3
5	6	4	3	2	1
6	4	5	1	3	2

Uniontypus IX′c.

a	a	a	b	c	c
a	a	a	b	c	c
a	a	a	b	c	c
a	a	a	b	c	c
a	a	a	b	c	c
a	a	a	b	c	c

Gattungsschema der Klasse IX′.

X. Grundklasse.

Uneigentliche Transformation in sich:

$((56) \mid (56) \mid (56))\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(34)\ (56)\}$; $\alpha = 2$.

$\mathfrak{U} \equiv \{(234)\}\mathfrak{A}$; $u = 6$.

$\Omega_3 \equiv \{(12)\ (35)\ (46) \mid (12)\ (36)\ (45)\}$; $\gamma_3 = 2$.

$\gamma = 12$.

Anzahl der Familien: $3 \times 360 = 1080$.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	4	3
3	5	1	2	6	4
4	6	2	1	3	5
5	3	4	6	2	1
6	4	5	3	1	2

Grundtypus X.
Typus X.
Uniontypus Xa.

---

durch Spiegelung an der Hauptdiagonale, also vermöge R_3 die Uniontypen der Klasse K'' entstehen. Die letzteren werden hier, um Raum zu sparen, nicht mehr besonders aufgeführt. Als koordinierte Quadrate haben drei einander in der angegebenen Weise entsprechende Uniontypen aus den drei Klassen nach Satz 14 dieselbe Automorphismengruppe.

Jede der drei Klassen enthält vier Gattungen, die Grundklasse X also *zwölf* Gattungen.

Gattung	$\mathfrak{A}$	α	Familien
a	{(34) (56)}	2	60
b	{(34) (56)}	2	60
c	{e}	1	120
d	{e}	1	120
			360

Bei den Klassen X′ und X″ hat die Umordnungsgruppe die Ordnung 1.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	4	5	1	2
4	5	6	3	2	1
5	4	2	1	6	3
6	3	1	2	4	5

Uniontypus X b.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	4	2
4	6	5	2	3	1
5	3	6	1	2	4
6	4	2	5	1	3

Uniontypus X c.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	4	3
3	4	1	6	2	5
4	3	5	1	6	2
5	6	4	2	3	1
6	5	2	3	1	4

Uniontypus X′ a.
Typus X′.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	2	5	6	1
4	3	6	2	1	5
5	6	1	3	4	2
6	5	4	1	2	3

Uniontypus X′ b.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	6	1	5	2	4
4	5	2	6	1	3
5	3	6	2	4	1
6	4	5	1	3	2

Uniontypus X′ c.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	2	5	4	1
4	5	6	3	1	2
5	4	1	2	6	3
6	3	4	1	2	5

Uniontypus X d.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	6	2	1	5
4	5	2	3	6	1
5	6	4	1	2	3
6	3	1	5	4	2

Uniontypus X′ d.

a	b	c	c	d	d
a	b	c	c	d	d
a	c	c	b	d	d
a	c	b	c	d	d
a	c	b	c	d	d
a	c	c	b	d	d

Gattungsschema der Klasse X′.

a	b	c	c	d	d
b	a	d	d	c	c
c	d	a	c	d	b
c	d	c	a	b	d
d	c	b	d	c	a
d	c	d	b	a	c

Gattungsschema der Klasse X.

XI. Grundklasse.

Uneigentliche Transformation in sich:

$(e \mid e \mid e)\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(3456)\}; \quad \alpha = 4.$

$\mathfrak{U} \equiv \{(35)\}\,\mathfrak{A}; \quad u = 8.$

$\Omega_3 \equiv \{e \mid e\}\ ; \quad \gamma_3 = 1. \quad \gamma = 8.$

Anzahl der Familien:

$$3 \times 540 = 1620.$$

Jede der drei Klassen enthält sieben Gattungen, die Grundklasse XI also 21.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	2	6	1	5
4	5	6	2	3	1
5	6	1	3	2	4
6	3	5	1	4	2

Grundtypus XI.
Typus XI.
Uniontypus XI a.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	6	5	2	4	1
4	3	1	6	2	5
5	4	6	1	3	2
6	5	2	3	1	4

Uniontypus XI b.

Gattung	$\mathfrak{A}$	α	Familien
a	$\{(3456)\}$	4	30
b	$\{(3456)\}$	4	30
c	$\{(34)(56)\}$	2	60
d	$\{(34)(56)\}$	2	60
e	$\{e\}$	1	120
f	$\{e\}$	1	120
g	$\{e\}$	1	120
			540

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	6	1	2	4	5
4	5	2	1	6	3
5	3	4	6	2	1
6	4	5	3	1	2

Uniontypus XI c.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	6	4	5	1	2
4	5	6	3	2	1
5	3	1	2	6	4
6	4	2	1	3	5

Uniontypus XI d.

Die Umordnungsgruppe hat auch bei den Klassen XI′ und XI″ die Ordnung 1.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	6	2	5	1	4
4	5	6	3	2	1
5	3	4	1	6	2
6	4	1	2	3	5

Uniontypus XI e.

1	2	3	4	5	6
2	5	6	1	4	3
3	1	5	2	6	4
4	6	2	3	1	5
5	3	4	6	2	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XI f.

×

1	2	3	4	5	6
2	5	1	6	3	4
3	6	5	2	4	1
4	1	2	3	6	5
5	4	6	1	2	3
6	3	4	5	1	2

Uniontypus XI g.

a	b	f	f	f	f
b	a	f	f	f	f
g	g	c	e	d	e
g	g	e	c	e	d
g	g	d	e	c	e
g	g	e	d	e	c

Gattungsschema der Klasse XI.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	3	4	5
3	5	4	6	1	2
4	6	2	5	3	1
5	3	1	2	6	4
6	4	5	1	2	3

Typus XI′.
Uniontypus XI′ a.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	3	4	5
3	5	2	1	6	4
4	6	5	2	1	3
5	3	4	6	2	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XI′ b.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	4	1	5	6	2
4	3	6	1	2	5
5	6	4	2	3	1
6	5	2	3	1	4

Uuiontypus XI′ c.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	4	2	6	1	5
4	3	5	2	6	1
5	6	1	3	4	2
6	5	4	1	2	3

Uniontypus XI′ d.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	4	5	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	3	1	6	4	2
6	5	4	1	2	3

Uniontypus XI′ e.

1	2	3	4	5	6
2	4	1	6	3	5
3	6	5	2	4	1
4	1	6	5	2	3
5	3	4	1	6	2
6	5	2	3	1	4

Uniontypus XI′ f.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5
3	1	5	6	2	4
4	5	6	2	1	3
5	6	2	3	4	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XI′ g.

a	b	f	f	f	f
a	b	f	f	f	f
d	c	e	e	g	g
d	c	g	e	e	g
d	c	g	g	e	e
d	c	e	g	g	e

Gattungsschema der Klasse XI′.

XII. Grundklasse.

Uneigentliche Transformation in sich:

$(e \mid e \mid e)\ R_3$.

$\mathfrak{A} \equiv \{(34)(56)\}$; $\alpha = 2$.

$\mathfrak{U} \equiv \{(34)\}\mathfrak{A}$; $u = 4$.

$\Omega_3 \equiv \{e \mid e\}$; $\gamma_3 = 1$. $\gamma = 4$.

Anzahl der Familien: $3 \times 1080 = 3240$.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	5	4	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	4	6	1	3	2
6	3	1	5	2	4

Grundtypus XII.
Typus XII.
Uniontypus XII a.

Jede der drei Klassen enthält zehn Gattungen, die Grundklasse XII also 30.

Die Uniontypen a und b besitzen obige Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung zwei, alle übrigen nur den Automorphismus e. Somit enthalten die Gattungen a und b je 60 und alle übrigen 120 Familien.

$$2 \times 60 + 8 \times 120 = 1080.$$

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	6	2	5	1	4
4	5	6	2	3	1
5	3	4	1	6	2
6	4	1	3	2	5

Uniontypus XII b.

Die Umordnungsgruppe hat auch bei den Klassen XII′ und XII″ die Ordnung 1.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	3	6	4
3	4	1	6	2	5
4	6	2	5	1	3
5	3	6	2	4	1
6	5	4	1	3	2

Uniontypus XII c.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	3	6	4
3	5	2	6	4	1
4	3	6	2	1	5
5	6	4	1	3	2
6	4	1	5	2	3

Uniontypus XII d.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	6	3	5
3	4	5	1	6	2
4	6	2	5	1	3
5	3	6	2	4	1
6	5	1	3	2	4

Uniontypus XII e.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	5	2	6	1	4
4	6	1	2	3	5
5	4	6	1	2	3
6	1	5	3	4	2

Uniontypus XII f.

1	2	3	4	5	6
2	5	6	1	4	3
3	6	5	2	1	4
4	1	2	3	6	5
5	3	4	6	2	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XII g.

×

1	2	3	4	5	6
2	5	6	1	3	4
3	6	5	2	4	1
4	1	2	3	6	5
5	4	1	6	2	3
6	3	4	5	1	2

Uniontypus XII h.

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	6	5	2	4	1
4	1	2	6	3	5
5	4	6	1	2	3
6	5	4	3	1	2

Uniontypus XII i.

×

1	2	3	4	5	6
2	3	6	1	4	5
3	1	5	2	6	4
4	5	2	6	1	3
5	6	4	3	2	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XII k.

a	b	h	h	k	k
b	a	k	k	h	h
g	i	d	e	f	c
g	i	e	d	c	f
i	g	f	c	d	e
i	g	c	f	e	d

Gattungsschema der Klasse XII.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	5	2	6	4	1
4	6	5	2	1	3
5	3	4	1	6	2
6	4	1	3	2	5

Typus XII′.
Uniontypus XII′ a.

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	5	4	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	3	1	6	4	2
6	4	5	1	2	3

Uniontypus XII′ b.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	6	3	5
3	5	1	2	6	4
4	6	5	3	2	1
5	3	6	1	4	2
6	4	2	5	1	3

Uniontypus XII′ c.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	6	3	5
3	5	6	2	4	1
4	6	5	3	1	2
5	4	2	1	6	3
6	3	1	5	2	4

Uniontypus XII′ d.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	3	6	4
3	5	4	6	2	1
4	6	1	2	3	5
5	3	6	1	4	2
6	4	2	5	1	3

Uniontypus XII′ e.

1	2	3	4	5	6
2	6	4	5	3	1
3	4	5	1	6	2
4	5	6	2	1	3
5	3	1	6	2	4
6	1	2	3	4	5

Uniontypus XII′ f.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5
3	6	5	2	4	1
4	1	6	5	2	3
5	4	1	6	3	2
6	5	2	3	1	4

Uniontypus XII′ g.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5
3	5	6	2	1	4
4	1	5	6	2	3
5	6	2	3	4	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XII′ h.

1	2	3	4	5	6
2	3	5	1	6	4
3	1	2	6	4	5
4	5	6	2	1	3
5	6	4	3	2	1
6	4	1	5	3	2

Uniontypus XII′ i.

1	2	3	4	5	6
2	4	1	6	3	5
3	6	5	2	4	1
4	1	2	5	6	3
5	3	6	1	2	4
6	5	4	3	1	2

Uniontypus XII′ k.

a	b	h	h	k	k
a	b	h	h	k	k
c	e	g	d	f	i
c	e	d	g	i	f
c	e	d	g	f	i
c	e	g	d	i	f

Gattungsschema der Klasse XII′.

Zusammenstellung.

Grundklasse	Klassen	Gattungen	Familien
I	1	1	60
II	1	1	20
III	1	1	40
IV	1	2	180
V	1	5	540
VI	1	9	1080
VII	1	12	1080
VIII	3	6	108
IX	3	9	360
X	3	12	1080
XI	3	21	1620
XII	3	30	3240
12	22	109	9408

Wir geben zum Schluß noch an, welchen Klassen die von Tarry aufgefundenen 17 Typen angehören:

Tarryscher Typus	1	2	3	4	5	6	7	7′	8	9	10
Klasse	II	V	VIII″	X″	X	IX″	I	IV	VII	XI″	XII″
Tarryscher Typus	11	12	13	14	15	16					
Klasse	VIII	IX	XI	XII	VI	III					

Eingegangen 11. August 1929.

Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln.

Von *Ott-Heinrich Keller* in Frankfurt a. M.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 231
Vorbemerkungen 233
I. Teil: Eigenschaften der Raumerfüllung in n Dimensionen ..... 233—241
§ 1. Der Strahlensatz 233
§ 2. Staffeln 234
§ 3. Gerade und ungerade Richtflächen 236
§ 4. Kleinste Staffeln 238
§ 5. Stämme 239
§ 6. Flächengitter 240
II. Teil. Anwendungen auf den 3-dimensionalen Raum ..... 241—248
§ 7. Die Umgebung eines Würfeleckpunktes 242
§ 8. Die Raumerfüllung im großen 244

Minkowski vermutete, daß in einem unimodularen System von n linearen homogenen Formen in n Veränderlichen durch ganzzahlige, nicht triviale Wahl dieser Veränderlichen alle Formen gleichzeitig absolut unter Eins heruntergedrückt werden können, wenn nicht mindestens eine der Formen lauter ganzzahlige zu einander teilerfremde Koeffizienten hat.

Herrn *Siegel* gelang es, durch Methoden der analytischen Zahlentheorie zu zeigen, daß alle Formen gleichzeitig unter Eins heruntergedrückt werden können, wenn es ein System von Werten für die Veränderlichen gibt, das sämtlichen Formen unganze oder verschwindende Werte erteilt[1]). Hierdurch ist das Problem vereinfacht, und man hat nur noch die ganzzahlige Lösbarkeit eines gewissen ganzzahligen linearen unhomogenen Gleichungssystems zu untersuchen, ohne sich um die Größenverhältnisse dieser Lösungen kümmern zu müssen. Ferner zeigte Herr Siegel, daß sich sämtliche Formen der gegebenen Matrix gleichzeitig absolut unter Eins herunterdrücken lassen, wenn das für die Formen der gespiegelten reziproken Matrix der Fall ist.

Auf Anregung von Herrn *Dehn* versuchte nun der Verfasser, dem Problem auf geometrischem Wege näher zu kommen; die geometrische Deutung der Minkowskischen Vermutung führt auf das Problem der lückenlosen Erfüllung des n-dimensionalen Raumes mit kongruenten und parallel gerichteten Würfeln in gitterförmiger Lagerung. Fassen wir nämlich die n Formen, konstant gleich $\pm \frac{1}{2}$ gesetzt, als Gleichungen der Seitenflächen eines Parallelipipeds P, die ganzzahligen Wertsysteme der Veränderlichen als Mittelpunkte von mit P kongruenten Parallelipipeden auf, so besagt die Bedingung, daß nicht sämtliche Formen gleichzeitig absolut unter Eins heruntergedrückt werden können, die Schlichtheit, und diese zieht zusammen mit der Unimodularität die Lückenlosigkeit der

[1]) Math. Ann. 87 (1922), p. 36. Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen.

Raumerfüllung nach sich. Die Vermutung besagt dann, daß die Parallelipipede *geschichtet* liegen. Daraus würde durch Schluß von k auf $k-1$ folgen, daß es immer Würfelpaare gibt, die eine ganze Seitenfläche gemein haben, daß also eine Gitterrichtung mit einer Würfelkantenrichtung zusammenfällt. Umgekehrt würde sich hieraus wieder die Lagerung in Schichten ergeben.

Von dieser Seite griff auch Herr *Beppo Levi* das Problem an [1]). Er bestätigte jedoch dem Verfasser brieflich, daß sich in dem Beweis für die Minkowskische Vermutung, den er dort gab, eine Lücke befindet. Ferner gab er dort auch eine *arithmetische* Lösung für die Fälle $n = 2, 3, 4$. Für diese Dimensionszahlen sowie für $n = 5$ ist übrigens, wie man mit Hilfe einer Erweiterung des Siegelschen Satzes leicht einsieht, auch ohne die Voraussetzung der gitterförmigen Lagerung der Satz richtig, daß es immer Würfelpaare gibt, die eine ganze Seitenfläche gemein haben, woraus dann ebenfalls die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für diese Dimensionszahlen folgt.

Herr *Jansen* bewies die Vermutung arithmetisch für $n = 6$ [2]).

Der Beweis der Vermutung für beliebiges n gelang dem Verfasser nicht; aber je länger er sich mit dem Problem beschäftigte, umso deutlicher bemerkte er, daß die eigentlichen Schönheiten dieses Gegenstandes erst zutage treten, wenn man die Voraussetzung der gitterförmigen Lagerung gänzlich aufgibt. Infolgedessen verschob sich die ganze Fragestellung. Es galt, die natürliche Ordnung einer reichen Formenwelt aufzufinden, und die Frage, ob unter einer gegebenen Voraussetzung (der gitterförmigen Lagerung) noch andere Formen als die allertrivialste möglich sind, verblaßte immer mehr. Aus dem Rahmen der hier vorliegenden Arbeit würde eine Untersuchung dieser Frage gänzlich herausfallen.

Der Ausgangspunkt der Untersuchung ist das Verhalten einer Raumerfüllung in der Umgebung eines Punktes (§ 1). Hierdurch kann man gewisse Figuren von Würfeln, die *Staffeln*, übersehen (§ 2); und unter Benützung der Gleichheit der Würfelkanten kann man dann aus dem Verhalten an einer Stelle auf das Verhalten an entfernteren Stellen schließen (§ 3, 4). Es ergibt sich eine auffallende — aber im Begriff des Würfels begründete — Bevorzugung der Zahl 2. Alle Sätze dieser Paragraphen sind im Grunde Aussagen über *gerade* und *ungerade*.

In § 5 werden wir gewisse spezielle Staffeln betrachten, die wir *Stämme* nennen wollen. Wir gewinnen hier einen gewissen Zusammenhang aller denkbaren Raumerfüllungen: Es ergibt sich, *daß wir alle Raumerfüllungen aus einer von ihnen durch kontinuierliche Verschiebung der Würfel erzeugen können, wobei die Lückenlosigkeit oder die Schlichtheit der Raumerfüllung in keinem Augenblick verletzt wird.*

§ 6 bringt den Gittersatz (eine Erweiterung des Siegelschen Satzes): „*Unter den Koordinatendifferenzen zweier beliebiger Würfel findet sich mindestens eine ganze Zahl*".

Vielleicht ist der Aufbau des Ganzen besser zu überschauen, wenn wir nun noch ein Beispiel durchrechnen. Im II. Teil wollen wir deshalb die gewonnenen Ergebnisse auf den 3-*dimensionalen Raum* anwenden. Die im I. Teil entwickelten Begriffe ermöglichen eine bequeme Beschreibung der hier auftretenden Fälle. Die unmittelbare Betrachtung der einzelnen Würfel tritt hierbei fast gänzlich hinter der Verwendung von *Richtflächen* zurück, und diese sind nach den Sätzen des § 3 erheblich leichter zu handhaben als etwa die Würfel selbst, für die uns zu einer unmittelbaren Fernbeziehung nur der Siegelsche Satz zur Verfügung steht.

---

[1]) Rendiconti del circolo matematico di Palermo **31** (1911), p. 318, Un teorema di Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere.

[2]) Kieler Dissertation 1909.

Es ergibt sich, daß wir alle möglichen Typen einer Erfüllung des 3-dimensionalen Raumes aufzählen können.

Vorbemerkungen.

1. Der Raum von n Dimensionen, sowie die in Rede stehende Menge von Würfeln, die ihn lückenlos erfüllt, sei mit $\mathfrak{R}^n$ bezeichnet.

2. Ein Exponent im Text über einem ausgeschriebenen Wort, das ein geometrisches Gebilde^i bezeichnet, deute die *Dimensionszahl* i des betreffenden Gebildes^i an.

3. Gehört ein Würfel W einer Würfelmenge M an, so sei dies durch das Zeichen: $W \varepsilon M$ angedeutet.

4. Gehört ein Punkt P einem Gebilde G an, so wollen wir sagen, P liegt *auf* G, $P < G$. Ist P innerer Punkt von G, so wollen wir sagen, P liegt *in* G, $P <_i G$.

Ein Würfel liege in einem Raumteil r, $W < r$, wenn er innere Punkte mit r gemein hat.

5. Wir setzen voraus, daß die Würfel parallel gerichtet sind, daß also die Kanten[1] sämtlicher Würfel einem festen Achsensystem parallel sind.

Wir führen ein Koordinatensystem ein. Anfangspunkt sei der Mittelpunkt eines beliebigen Würfels W_0. Die Koordinatenachsen seien dem oben erwähnten Achsensystem parallel.

6. Die verschiedenen Achsenrichtungen seien durch *untere* Indizes an den Koordinaten gekennzeichnet. Bestimmte Werte der Koordinaten seien durch *obere* Indizes bezeichnet. So sagen wir z. B., der Punkt P_ν habe die Koordinaten $x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu$.

Unter den Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines Würfels seien die Koordinaten seines Mittelpunktes verstanden.

7. Teilen sich die Koordinatenrichtungen in Klassen ein, so wollen wir diese durch verschiedene Querstriche über oder unter dem x kenntlich machen: $\bar{x}, \bar{\bar{x}}, \ldots$ oder $\underline{x}, \underline{\underline{x}}, \ldots$

8. Ein x ohne unteren Index vertrete alle Koordinaten, bzw. alle noch nicht genannten. Ihre Anzahl werde in Klammern unter dem x angegeben.

$\bar{x}_1, \underset{(i)}{\bar{x}} = 0$ bedeute z. B.: Es gibt $i+1$ Koordinaten der I. Klasse. i von ihnen seien gleich 0. Von $\bar{x}_1$ ist nichts ausgesagt.

9. Wir werden von § 2 an voraussetzen, daß alle Würfel einander kongruent sind, in dem Sinne, daß sie durch eine Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können. Wir können dann die Einheiten auf den Koordinatenachsen gleich den Längen der Würfelkanten annehmen.

Ist ein Punkt $P_1(x^1) < W_1(\xi^1)$, so ist $|x^1 - \xi^1| \leqq \frac{1}{2}$; ist $P_1 <_i W_1$, so ist $|x^1 - \xi^1| < \frac{1}{2}$. Die *Lückenlosigkeit* besagt, daß es zu jedem Punkt P einen Würfel $W > P$ gibt.

10. Zwei Würfel W_1 und W_2 haben einen Punkt $P\left(x = \frac{\xi^1 + \xi^2}{2}\right)$ gemein, wenn $|\xi^1 - \xi^2| \leqq 1$. Sie haben einen inneren Punkt gemein, wenn $|\xi^1 - \xi^2| < 1$. Die *Schlichtheit* der Raumerfüllung besagt, daß keine zwei Würfel einen inneren Punkt gemein haben, daß also $|\xi_\mu^1 - \xi_\mu^2| \geqq 1$ für mindestens ein μ.

I. Teil. Eigenschaften der Raumerfüllung in n Dimensionen.

§ 1. Der Strahlenansatz.

Wir machen jetzt nur die Voraussetzung 5: Alle Würfel seien parallel gerichtet. Über die Größe sagen wir nichts aus.

Sie P_0 ein beliebiger Punkt des Raumes. Wir machen ihn zum Koordinatenanfangspunkt. Die Koordinatenebenen^{n-1} $x_i = 0$ zerlegen den Raum in 2^n Stücke, deren jedes

durch eine bestimmte Verteilung der Vorzeichen der Koordinaten gekennzeichnet ist. Wir wollen diese Stücke die *Strahlen*^{n} des Punktes P_0 nennen.

Enthält ein Würfel W, auf dem P_0 liegt, einen inneren Punkt eines Strahles Σ_ν, so wollen wir sagen W *belege* Σ_ν.

Jeder Strahl wird von einem und nur einem Würfel belegt.

a) Wäre ein Strahl von keinem Würfel belegt, so hätte P_0 einen positiven Abstand e von der Gesamtheit aller Würfel, die einen inneren Punkt dieses Strahles enthalten. Ein innerer Punkt P_1 des Strahles, der von P_0 einen kleineren Abstand hätte als e, läge dann auf keinem Würfel $W \varepsilon \mathfrak{R}^n$, was nicht möglich ist.

b) Angenommen, ein Strahl sei von zwei Würfeln W_1 und W_2 belegt. W_1 und W_2 enthalten dann beide den Punkt P_0. Sie mögen genau ein Flächenstück $\underset{(n-i)}{K}(\bar{x} = 0)$, sagen wir i. Dimension ($i \leqq n-1$) gemein haben. W_1 und W_2 liegen auf *verschiedenen* Seiten jeder Ebene^{n-1} $\bar{x} = 0$, denn angenommen, es sei etwa $\bar{x}_1 > 0$ für beide Würfel, so gäbe es Punkte $\underset{(n-i-1)}{\bar{x}_1} > 0, \bar{x} = 0$, die auf beiden Würfeln lägen und nicht zu K gehörten, entgegen der Voraussetzung. Die $\bar{x}$-Koordinaten der Punkte von W_1 und W_2 haben also entgegengesetztes Vorzeichen, und ein Strahl kann nicht von beiden Würfeln belegt werden.

Es liege nun P_0 in einer Seitenfläche^i $\underset{(n-i)}{s}(\bar{x} = 0)$ eines Würfels W. Die Ebenen^{n-i} $\bar{x} = 0$ begrenzen also den Würfel, die Ebenen $\bar{\bar{x}} = 0$ hingegen nicht. Die $\bar{x}$-Koordinaten sämtlicher Punkte des Würfels haben jeweils das gleiche Vorzeichen $\bar{\varepsilon}$, während die $\bar{\bar{x}}$-Koordinaten mit beiden Vorzeichen vorkommen. W belegt also alle Strahlen mit den Vorzeichen sign $\bar{x} = \bar{\varepsilon}$, sign $\bar{\bar{x}} = \pm 1$, also 2^i Strahlen.

Bezeichnet nun w_λ die Anzahl der Würfel, in deren λ-dimensionaler Seitenfläche P_0 liegt, so ergibt sich die Formel:

Satz 1 (Strahlensatz).

$$\sum_0^n 2^\lambda w_\lambda = 2^n.$$

Denn es müssen im ganzen 2^n Strahlen belegt sein.

Zusatz. Das erste nicht verschwindende w_λ in der Reihe $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ist eine gerade Zahl, sofern $\lambda \leqq n-1$ ist.

§ 2. Staffeln.

Wir machen nun die Voraussetzung 9 (pg. 233), daß sämtliche Würfel einander kongruent sind.

Einer gewissen Würfelmenge M, die wir später *Staffel* nennen wollen, müssen wir eine bestimmte Koordinatenebene^i $\underset{(n-i)}{\bar{x}} = 0$ zuordnen. Diese Ebene wollen wir die *Richtebene*^{i} $\underset{(n-i)}{R^i}(\bar{x} = 0)$ der Staffel nennen. Die Koordinaten, die auf der Richtebene konstant sind, wollen wir mit $\bar{x}$, die übrigen, in denen R^i ausgedehnt ist, mit $\bar{\bar{x}}$ bezeichnen.

Eine Ebene^i parallel zur Richtebene^i, die eine Seitenfläche^i eines Würfels der Staffel enthält, heiße eine *Richtseitenebene*^{i}.

Ein Punkt einer Richtseitenebene R_1^i heiße *gewöhnlich* in M, wenn er auf keiner zu R_1^i senkrechten Seitenfläche $\bar{\bar{x}} =$ konst. eines Würfels $W \varepsilon M$ liegt. Die gewöhnlichen Punkte einer Richtseitenebene erfüllen Gebiete^i auf ihr. Ein solches zusammenhängendes Gebiet F^i oder f^i heiße eine *Richtfläche* der Staffel M über der Richtebene R^i, $F^i \div (M, R^i)$.

Ein Würfel $W \varepsilon M$, der einen in M gewöhnlichen Punkt P enthält, enthält auch jede Richtfläche von M, auf der P liegt.

Ein Würfel W sei an eine Richtfläche f^i einer Staffel M *angewachsen*, $W \overset{a}{=} f^i \div M$, wenn $W \varepsilon M$, und f^i in einer Seitenfläche^i von W liegt. W sei in f^i mit einem anderen Würfel W_1 *zusammengewachsen*, wenn $W \overset{a}{=} f^i$ und $W_1 \overset{a}{=} f^i$.

Eine Menge S von Würfeln heiße eine *Staffel i-ter Dimension über der Richtebene* $R^i_{(n-i)}(\bar{x} = 0)$, $S[R^i(\bar{x} = 0)]$, wenn

1) $\bar{\xi} \equiv \bar{\xi}^0 \pmod 1$ für alle Würfel von S;

2) an jede Richtfläche $F^i_0 \div (S, R)$ eine gerade Anzahl von Würfeln angewachsen ist.

Satz 2 (Staffelsatz).

Die Gesamtheit aller Würfel, für die $\bar{\xi}_{(n-i)} \equiv \bar{\xi}^0$ *(mod* 1*), bildet eine Staffel* $\bar{S}[R^i_{(n-i)}(\bar{x} = 0)]$.

Die Bedingung (1) ist erfüllt. Angenommen, es gäbe eine Richtfläche F^i_0, an die eine ungerade Anzahl von Würfeln angewachsen wäre.

Es gibt auf F^i_0 einen im $\mathfrak{R}^n$ gewöhnlichen Punkt P_0; alle Würfel, auf denen P_0 liegt, enthalten F^i_0. Es ist also $w_\lambda(P_0) = 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, i-1$, und demnach $w_i(P_0) \equiv 0 \pmod 2$. Für alle Würfel, auf deren i-dimensionaler Seitenfläche P_0 liegt, ist nach Voraussetzung $\bar{\bar{\xi}}_{(i)} \equiv \bar{\bar{x}} + \frac{1}{2} \pmod 1$, also $\bar{\xi}_{(n-i)} \equiv \bar{x} + \frac{1}{2} \equiv \bar{\xi}^0 \pmod 1$; daher gehören alle diese Würfel zu $\bar{S}$, sind an F^i_0 angewachsen und sind in gerader Anzahl, entgegen der Annahme.

Die Staffel $\bar{S}$ enthält alle möglichen Staffeln über derselben Richtebene R^i, die einen ihrer Würfel enthalten. Wir wollen daher eine solche Staffel eine *größte Staffel* nennen und mit einem Querstrich über dem Buchstaben bezeichnen.

Es gibt also zu jedem Würfel des Raumes über einer beliebig vorgegebenen Richtebene R^i eine Staffel, die größte Staffel über R^i, die jenen Würfel enthält.

Betrachten wir eine Richtfläche als Richtfläche einer größten Staffel, so wollen wir die Staffelbezeichnung *weglassen*. Eine Richtfläche *ohne* Staffelbezeichnung sei also stets als Richtfläche der größten Staffel über ihr aufzufassen.

Satz 3 (Ableitungssatz).

Die Gesamtheit $S'(\bar{\bar{\xi}}_1 \equiv \bar{\bar{\xi}}^0_1)$ *aller Würfel einer Staffel* S*, für die noch eine weitere Koordinate* $\bar{\bar{\xi}}_1 \equiv \bar{\bar{\xi}}^0_1$ *(mod* 1*), bildet eine Staffel* $(i-1)$*. Dimension über der Richtebene* R'^{i-1} $(\bar{\bar{x}}_1 = 0, \bar{x} = 0)$.

Die Bedingung (1) ist erfüllt.

Sei $f^{i-1}_0(\bar{\bar{x}}_1 = \bar{\bar{x}}^0_1) \div (S', R'^{i-1})$. f^{i-1}_0 ist die gemeinsame Grenze zweier Richtflächen $F^i_1(\bar{\bar{x}}_1 > \bar{\bar{x}}^0_1) \div (S, R^i)$ und $F^i_2(\bar{\bar{x}}_1 < \bar{\bar{x}}^0_1) \div (S, R^i)$.

Jeder Würfel aus S, der f^{i-1}_0 enthält, ist an F^i_1 oder an F^i_2 angewachsen. Danach können wir die Würfel, auf denen f^{i-1}_0 liegt, in drei Klassen einteilen:

1) Seien z_1 Würfel aus S an F^i_1 *und* an F^i_2 angewachsen. Diese Würfel liegen nicht in S', da $\bar{\bar{\xi}}_1 \not\equiv \bar{\bar{x}}^0_1 + \frac{1}{2} \pmod 1$.

2) Seien z_2 Würfel an F^i_1, aber nicht an F^i_2 angewachsen; diese Würfel liegen in S' und sind an f^{i-1}_0 angewachsen, da $\bar{\bar{\xi}}_1 \equiv \bar{\bar{x}}^0_1 + \frac{1}{2}$.

3) Seien z_3 Würfel an F^i_2, aber nicht an F^i_1 angewachsen; auch diese sind $W \overset{a}{=} f^{i-1}_0 \div S$.

Es ist nun, da S eine Staffel ist, $z_1 + z_3 \equiv 0 \pmod 2$ und $z_1 + z_2 \equiv 0 \pmod 2$,

also $z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod 2$. Die Anzahl der an f_0^{i-1} angewachsenen Würfel aus S' ist gerade, und S' ist eine Staffel.

Wir wollen S' eine *Ableitung von S nach der Richtung* $\bar{\bar{x}}_1$ nennen.

Ist $\bar{\bar{\xi}}_1 \equiv \bar{\bar{\xi}}_1^0 \pmod 1$ für alle Würfel einer Staffel S, so ist S mit $S'(\bar{\bar{\xi}}_1 \equiv \bar{\bar{\xi}}_1^0)$ identisch, und S läßt sich auffassen als Staffel über der Richtebene $\underset{(n-i)}{R^{i-1}}(\bar{x} = 0, \bar{\bar{x}}_1 = 0)$.

Eine Staffel $S[R^i]$ ist darstellbar als Summe ihrer Ableitungen nach einer Richtung, also von Staffeln $(i-1)$. Dimension, mithin auch als Summe von Staffeln 0. Dimension.

Eine größte Staffel läßt sich auffassen als Ableitung einer größten Staffel $(i+1)$. Dimension, also als $(n-i)$. Ableitung des $\mathfrak{R}^n$.

Eine größte Staffel $\bar{S}[R^i]$ ist darstellbar als Durchschnitt der einen Würfel aus $\bar{S}$ enthaltenden größten Staffeln $(i+1)$. Dimension über allen Richtebenen, die R^i ganz enthalten, also auch darstellbar als Durchschnitt von größten Staffeln $(n-1)$. Dimension (die wir später Stämme nennen wollen).

Sind S_1 und S_2 zwei Staffeln über derselben Richtebene, und haben sie keinen Würfel gemein, so kann man ihre Summe bilden; umfaßt die eine die andere vollständig, so kann man von ihrer Differenz sprechen. Summe und Differenz sind wieder Staffeln über derselben Richtebene; denn man hat an jeder Richtfläche eine gerade Anzahl von angewachsenen Würfeln hinzugefügt oder weggenommen.

§ 3. Gerade und ungerade Richtflächen.

Sei f_0^i Richtfläche der Staffel S. Für jeden Würfel $W \overset{a}{=} f_0^i \div S$ ist $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1^0 \pm \frac{1}{2}$; gilt das obere Vorzeichen, so wollen wir sagen, W sei an f_0^i von $+\bar{x}_1$, im anderen Falle von $-\bar{x}_1$ angewachsen.

Sei z^+ die Anzahl der an f_0^i von $+\bar{x}_1$, z^- die der an f_0^i von $-\bar{x}_1$ angewachsenen Würfel der Staffel. Es ist $z^+ \equiv z^- \pmod 2$ nach Definition der Staffel.

Die Richtfläche f_0^i heiße nun für die Staffel S in der auf f_0^i senkrechten Richtung $\bar{x}_1$ *von geradem oder ungeradem Charakter*, je nachdem z^+ und z^- gerade oder ungerade sind:

$$f_0^i \div S \equiv z^{\pm} \pmod{2,\ \bar{x}_1}.$$

Satz 4.

Sei $\bar{S}[\underset{(n-1)}{R^i}(\bar{x} = 0)]$ eine größte Staffel; seien in einer Richtfläche $f_0^i \div \bar{S}$ w_i Würfel zusammengewachsen; sei f_0^i in r Richtungen ungerade, in $n-i-r$ Richtungen gerade.

Dann ist $w_i \equiv 2r$ *(mod 4).*

Denn sei f_0^i die gemeinsame Grenze von $\underset{(n-i-1)}{{}^1F_l^{i+1}}(\bar{x}_l, \bar{x} = \bar{x}^0)$ und $\underset{(n-i-1)}{{}^2F_l^{i+1}}(\bar{x}_l, \bar{x} = \bar{x}^0)$. Sei a_l^1 die Anzahl der an ${}^1F_l^{i+1}$ angewachsenen, nicht zu S gehörigen Würfel, a_l^2 die Anzahl der Würfel, die $W \overset{a}{=} {}^1F_l^{i+1}$, $W \varepsilon S$. Dann ist $a_l^1 \equiv a_l^2 \equiv f_0^i \pmod{2, \bar{x}_l}$.

Sei P_1 innerer Punkt von f_0^i; alle Würfel, in deren i-dimensionaler Seitenfläche P_1 liegt, sind an f_0^i angewachsen. Alle Würfel, in deren $(i+1)$-dimensionaler Seitenfläche P_1 liegt, sind an eines und nur eines der von f_0^i begrenzten Gebiete ${}^1F_l^{i+1}$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ angewachsen und gehören nicht zu S. Ihre Anzahl ist $w_{i+1}(P_1) = \sum_1^{n-i} a_l^1 \equiv r \pmod 2$. Aus dem Strahlensatz folgt nun:

$$2w_{i+1} + w_i = 2^{n-i} - \sum_{i+2}^{n} w_\lambda 2^{\lambda - i} \equiv 0 \pmod 4, \quad \text{oder} \quad w_i \equiv 2r \pmod 4.$$

Die Fläche $N_{\bar{x}_1}(f, r)$, die aus einer Richtfläche f durch Verschiebung um die ganze Zahl r nach der $\bar{x}_1$-Richtung hervorgeht, wollen wir den r. *Nachkommen* von f in der $\bar{x}_1$-Richtung nennen. Der Rand von f werde hierbei mitgerechnet.

Der Projektionskörper^{i+1} von einer Richtfläche^{i} f^i aus dem unendlich fernen Punkt der $\bar{x}_1$-Richtung heiße der *Schatten*$^{i+1}$ von f^i in der $\bar{x}_1$-Richtung: $\sigma_{\bar{x}_1}(f^i)$.

Satz 5 (Nachkommensatz). *Alle Richtflächen auf allen Nachkommen einer Richtfläche f_0^i in einer bestimmten auf ihr senkrechten Richtung $\bar{x}_1$ haben denselben Charakter wie f_0^i.*

Die Anzahl der Würfel aus S, die an eine bestimmte Richtfläche des Schattens $\sigma_{\bar{x}_1}(f_0^i)$ angewachsen sind, hat ebenfalls diesen Charakter.

Für $r = 0$ ist der Satz eine Tautologie. Angenommen, wir hätten ihn schon für die ersten r Nachkommen und die dzawischen liegenden Schattenteile bewiesen, es sei also $N_{\bar{x}_1}(f_0^i, r) \equiv f_0^i \pmod{2, \bar{x}_1}$. Sei oBdA $r > 0$. Wir teilen nun $N_{\bar{x}_1}(f_0^i, r)$ und $N_{\bar{x}_1}(f_0^i, r+1)$ so in Richtflächen ${}^1f_r^i, {}^2f_r^i, \ldots$ und ${}^1f_{r+1}^i, {}^2f_{r+1}^i, \ldots$ ein, daß ${}^\nu f_r^i$ und ${}^\nu f_{r+1}^i$ Nachkommen voneinander sind. Es möge die Richtfläche ${}^\nu F_1^{i+1}$ ganz im Schatten von ${}^\nu f_r^i$, und zwar zwischen ${}^\nu f_r^i$ und ${}^\nu f_{r+1}^i$ liegen.

Ist nun ein Würfel W an ${}^\nu f_r^i$ von $+\bar{x}_1$ angewachsen, so wächst W auch an ${}^\nu F_1^{i+1}$ und ${}^\nu f_{r+1}^i$ an, und zwar an ${}^\nu f_{r+1}^i$ von $-\bar{x}_1$; andrerseits wächst jeder Würfel, der an ${}^\nu f_{r+1}^i$ von $-\bar{x}_1$ angewachsen ist, auch an ${}^\nu F_1^{i+1}$ und an ${}^\nu f_r^i$ an, und zwar an ${}^\nu f_r^i$ von $+\bar{x}_1$; ferner ist jeder Würfel der Staffel, der $W \overset{a}{=} {}^\nu F_1^{i+1}$, auch an ${}^\nu f_r^i$ von $+\bar{x}_1$ und an ${}^\nu f_{r+1}^i$ von $-\bar{x}_1$ angewachsen.

Sei z die Anzahl der Würfel der Staffel, die $W \overset{a}{=} {}^\nu F_1^{i+1}$. Dann sind diese z Würfel auch an ${}^\nu f_r^i$ von $+\bar{x}_1$ und an ${}^\nu f_{r+1}^i$ von $-\bar{x}_1$ angewachsen. Da diese Anzahlen aber die Charaktere von ${}^\nu f_r^i$ und ${}^\nu f_{r+1}^i$ bestimmen, so ist

$$z \equiv {}^\nu f_{r+1}^i \equiv {}^\nu f_r^i \equiv f_0^i \pmod{2, \bar{x}_1},$$

was zu beweisen war.

Zusatz. *An jede Richtfläche^{i+1} des Schattens einer ungeraden Richtfläche^{i} ist mindestens ein Würfel der Staffel angewachsen.*

Die Gesamtheit aller Nachkommen einer Richtfläche f in einer bestimmten Richtung heiße eine *Nachkommenschar*. Sie sei gerade oder ungerade, je nachdem f gerade oder ungerade ist.

Satz 6 (Schattensatz). *Die Summe der Charaktere aller Nachkommenscharen, die im Schatten einer gegebenen Richtfläche f_0^i liegen, ist für $i \leqq n-2$ gerade.*

Sei $F_0^{i+1}(\alpha \leqq \bar{x}_1 \leqq \underset{(n-i-1)}{\beta}, \bar{x} = \bar{x}^0) \div \bar{S}\,[R^{i+1}(\underset{(n-i-1)}{\bar{x}_1}, \bar{x} = 0)]$, eine beliebige Richtfläche im Schatten $\sigma_{\bar{x}_1}(f_0^i)$. Im Intervall $\beta - 1 \leqq x_1 < \beta$ haben alle Nachkommenscharen einen Vertreter, etwa $f_1^i(\bar{x}_1 = \bar{x}_1^1) \div S_1$, $f_2^i(\bar{x}_1 = \bar{x}_1^2) \div S_2, \ldots, f_m^i(\bar{x}_1 = \bar{x}_1^m) \div S_m$. (Es kann hierbei sehr wohl $\bar{x}_1^i = \bar{x}_1^k$ sein; wesentlich ist, daß $S_i \neq S_k$.) Es gebe a_ν Würfel, die zu S_ν gehören und an f_ν^i von $+\bar{x}_1$ angewachsen sind. In den verschiedenen a_ν sind aber alle Würfel $W \overset{a}{=} F_0^{i+1} \div \bar{S}$ aufgezählt; denn jede zu f_0^i parallele Seitenfläche^{i} jedes Würfels $W \overset{a}{=} F_0^{i+1}$ zerfällt ja in Richtflächen, von denen ein Teil in $\sigma_{\bar{x}_1}(f_0^i)$ liegt. Es ist daher

$$\sum_1^m f_\nu^i \equiv \sum_1^m a_\nu \equiv 0 \pmod{2}.$$

Zusatz. Im Schatten einer ungeraden Richtfläche $f_0^i \div S$ gibt es mindestens noch eine andere ungerade Richtfläche f_1^i einer von S verschiedenen Staffel S_1. $f_1^i \div S_1$ möge ein *Gesell* von $f_0^i \div S$ in der $\bar{x}_1$-Richtung heißen.

Satz 7 (Grenzflächensatz). *Die gemeinsame Grenze f_0^{i-1} zweier Richtflächen derselben Staffel F_1^i und F_2^i ist Richtfläche einer Ableitung, $f_0^{i-1} \div S'$, und es ist $f_0^{i-1} \equiv F_1^i + F_2^i \pmod{2, \bar{x}}$.*

Seien z_1 und z_2 die Anzahlen der Würfel, die an F_1^i bzw. F_2^i von $+\bar{x}_1$ angewachsen sind. In der Summe $z_2 + z_2$ ist jeder Würfel doppelt gezählt, der nicht zu S' gehört; denn ein solcher Würfel ist an F_1^i *und* an F_2^i angewachsen. Da wir nur Restklassen (mod 2) betrachten wollen, können wir diese Würfel weglassen. Alle übrigen Würfel sind an f_0^{i-1} von $+\bar{x}_1$ angewachsen. Umgekehrt, jeder Würfel $W^a = f_0^{i-1}$ wächst auch an F_1^i oder F_2^i an. Es ist also $f_0^{i-1} \equiv F_1^i + F_2^i \pmod{2, \bar{x}_1}$, was zu beweisen war.

Die gemeinsame Grenze zweier gerader oder zweier ungerader Richtflächen ist in der Ableitung *gerade.*

Die gemeinsame Grenze einer geraden und einer ungeraden Richtfläche ist in der Ableitung *ungerade.*

Läßt sich eine Staffel $S[R^i]$ als Ableitung nach der $\bar{x}_1$-Richtung einer Staffel $S_1[R_1^{i+1}(\bar{x}_1, \underset{(n-i-1)}{\bar{x} = 0})]$ auffassen (wie dies ja bei größten Staffeln der Fall ist), so ist eine beliebige ungerade Richtfläche $f_0^i \div S$ stets die gemeinsame Grenze einer geraden und einer ungeraden Richtfläche $F_1^{i+1} \div S_1$ und $F_2^{i+1} \div S_2$.

Wir wollen nun den Strahlbegriff in zwei Richtungen verallgemeinern:

1) Nicht nur der $\mathfrak{R}^n$, sondern *jede Richtebene* R^i ($\bar{x} = 0$) kann von einem Punkt P_0 in 2^i Strahlen[i] zerlegt werden. Sie mögen Strahlen[i] *nach den* Richtungen $\bar{\bar{x}}$ heißen. Es hat dann Sinn, von in einer Richtung *geraden oder ungeraden* Strahlen zu sprechen: ein Strahl habe den Charakter der ihn belegenen Richtfläche.

2) Wir betrachten nicht nur die Strahlen von einem Punkt, sondern auch Strahlen *von einer Richtfläche.* Die Vorzeichen der in der Richtfläche veränderlichen Koordinaten unterscheiden wir hierbei nicht (eine Richtfläche kann nur nach auf ihr senkrechten Richtungen strahlen).

Ist nun A_l^i die Anzahl der in einer Richtung $\bar{x}_l$ ungeraden Strahlen von einer Richtfläche $f_0^k \div S$ nach den Richtungen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i$, so ist $A_l^i \equiv f_0^k$ (mod 2, $\bar{x}_l$).

Für $i = 1$ ist dies der Grenzflächensatz; angenommen, wir hätten den Satz schon für $i - 1$ bewiesen.

Es mögen $F_1^{k+1}(\bar{x}_1 < \bar{x}_1^0)$ und $F_2^{k+1}(\bar{x}_2 > \bar{x}_1^0)$ durch f_0^k getrennt werden und im Schatten $\sigma_{\bar{x}_1}(f_0^k)$ liegen. Die Strahlen von f_0^k nach $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i$, für die sign $\bar{x}_1 = +1$ bzw. -1 ist, können aufgefaßt werden als Strahlen von F_1^{k+1} bzw. F_2^{k+1} nach $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_i$. Die Anzahl $B_{l,1}^{i-1}$ bzw. $B_{l,2}^{i-1}$ der nach $\bar{x}_l$ ungeraden von ihnen ist nach Annahme $B_{l,1}^{i-1} \equiv F_1^{k+1}$ (mod 2, $\bar{x}_l$) und $B_{l,2}^{i-1} \equiv F_2^{k+1}$ (mod 2, $\bar{x}_l$), also nach dem Grenzflächensatz

$$A_l^i = B_{l,1}^{i-1} + B_{l,2}^{i-1} \equiv F_1^{k+1} + F_2^{k+1} \equiv f_0^k \pmod{2, \bar{x}^l},$$

was zu beweisen war.

§ 4. Kleinste Staffeln.

Eine Staffel $\underline{S}[R^i]$ möge *kleinste Staffel* heißen, wenn sie keine Staffel über derselben Richtebene als echten Teil enthält. Wir wollen kleinste Staffeln mit einem Querstrich unter dem Buchstaben versehen.

Eine Richtung x_μ heiße für eine Staffel $\underline{S}$ gerade, $x_\mu \equiv 0$ (mod 2, $\underline{S}$), wenn alle ihre Richtflächen bzw. — im Falle daß die Richtebene nach x_μ ausgedehnt ist — jede Richtfläche einer Ableitung nach x_μ gerade ist. Wir wollen diese Richtungen mit $\bar{\bar{\bar{x}}}$ bezeichnen.

Gibt es in $\underline{S}$ bzw. in einer Ableitung S' eine nach x_μ ungerade Richtfläche, so heiße x_μ für $\underline{S}$ *ungerade*. Zu einem beliebigen Wert $x_\mu = x_\mu^0$ einer ungeraden Koordinate gibt es nach dem Nachkommensatz mindestens einen Würfel der Staffel, für den $|\xi_\mu - x_\mu^0| \leqq \frac{1}{2}$.

Eine kleinste Staffel $S[R^i]$ sei von der *k. Ordnung*, $S^k[R^i]$, wenn für sie k Richtungen ungerade und $n - k - i$ Richtungen gerade sind.

Satz 8 (Satz über kleinste Staffeln). *Eine gerade Koordinate hat für alle Würfel einer kleinsten Staffel $\underline{S}$ den gleichen Wert.*

Man kann die Gleichungen $\overline{\overline{\overline{x}}} = 0$ zu den Gleichungen $\bar{x} = 0$ der Richtebene nach Belieben hinzufügen oder aus ihnen weglassen, ohne die Staffeleigenschaft der Würfelmenge $\underline{S}$ zu gefährden.

1) Sei eine gerade Richtung $\overline{\overline{\overline{x}}}_1$ auf R^i konstant. Dann liegt eine beliebige zu R^i und zu $\overline{\overline{\overline{x}}}_1$ parallele Seitenfläche^{i+1} eines Würfels der Staffel im Schatten $\sigma_{\overline{\overline{\overline{x}}}_1}(f_0^i)$ einer Richtfläche $f_0^i \div S$, und an jede auf ihr liegende Richtfläche^{i+1} ist nach dem Nachkommensatz eine gerade Anzahl von Würfeln angewachsen. $\underline{S}$ ist also auch Staffel über der Richtebene $R^{i+1}(\underset{(n-i-1)}{\overline{\overline{\overline{x}}}_1}, \bar{x} = 0)$.

2) Sei R^i in einer geraden Richtung $\overline{\overline{\overline{x}}}_1$ ausgedehnt. Dann ist die Gesamtheit s aller Würfel der Staffel, für die $\overline{\overline{\overline{\xi}}}_1 = \overline{\overline{\overline{\xi}}}_1^0$, wieder eine Staffel über derselben Richtebene. Denn alle Richtflächen^{i-1} der Ableitung $S'(\overline{\overline{\overline{\xi}}}_1 \equiv \overline{\overline{\overline{\xi}}}_1^0)$ sind nach $\overline{\overline{\overline{x}}}_1$ gerade, und an jede von ihnen, sowie an alle Richtflächen^i des Schattens jeder von ihnen ist eine gerade Anzahl von Würfeln mit gleichen $\overline{\overline{\overline{\xi}}}_1$-Koordinaten angewachsen. Es ist $s < S' < \underline{S}$, aber, da s nach Definition der kleinsten Staffel nicht echter Teil von $\underline{S}$ sein kann, $s = \underline{S}$.

Eine kleinste Staffel $\underline{S}^k[R^i]$ k. Ordnung i. Dimension hat demnach denselben Aufbau wie eine Staffel k. Ordnung i. Dimension im $(k+i)$-dimensionalen Raum.

Sei $\mathfrak{R}^{n-1}(\bar{x}_1 = \text{const.})$ parallel zu einer Koordinatenebene und senkrecht zu R^i; $\mathfrak{R}^{n-1}$ schneide jede Richtfläche F_0^i in einer Fläche f_0^{i-1}, die ganz aus gewöhnlichen Punkten besteht. Wir erhalten dann eine lückenlose Erfüllung des $\mathfrak{R}^{n-1}$ mit Würfeln. Eine Staffel $S[R^i]$ in $\mathfrak{R}^n$ ist auch Staffel $S[R^{i-1}]$ in $\mathfrak{R}^{n-1}$, denn an jede Richtfläche f_0^{i-1} ist in $\mathfrak{R}^{n-1}$ dieselbe gerade Anzahl von Würfeln angewachsen, wie an F_0^i in $\mathfrak{R}^n$. *Eine Staffel i. Dimension hat also an jeder Stelle den Aufbau einer Staffel* 0. *Dimension im $(n-i)$-dimensionalen Raume $\mathfrak{R}^{n-i}$.*

Eine Staffel 1. Ordnung 0. Dimension hat jede beliebige Dimension und den Aufbau einer in Einheitsstrecken eingeteilten Geraden. Zwei benachbarte Würfel einer solchen Staffel haben eine ganze Seitenfläche gemein. Eine kleinste Staffel 1. Ordnung heiße daher eine „*Säule*".

Eine kleinste Staffel 0. Ordnung wäre eine gerade Anzahl zusammenfallender Würfel. *Eine Staffel ist also mindestens von der* 1. *Ordnung und geht in mindestens einer Richtung ins Unendliche.*

§ 5. Stämme.

Eine Staffel $(n-1)$. Dimension, $S[R^{n-1}(x_\mu = 0)]$, heiße ein *Stamm* in der x_μ-Richtung, $\mathfrak{S}(x_\mu)$.

Das Besondere dieser Staffeln liegt darin, daß an jede Richtfläche höchstens zwei Würfel angewachsen sein können; gehört der eine zum Stamm $\mathfrak{S}$, so liegt auch der andere in $\mathfrak{S}$.

Der Durchschnitt zweier Stämme derselben Richtung ist wieder ein Stamm (was bei allgemeinen Staffeln nicht der Fall zu sein braucht). Es hat also Sinn, von *dem* kleinsten Stamm $\mathfrak{S}(x_\mu; W_0)$ über einem bestimmten Würfel W_0 zu sprechen: er ist der Durchschnitt aller Stämme der x_μ-Richtung, die W_0 enthalten.

Sei $[\mathfrak{S}]$ der Raumteil, den $\mathfrak{S}$ erfüllt. Er heiße das *Stammgebiet. Dann ist* $[\mathfrak{S}]$ *ein Schatten.*

Denn an eine Richtfläche ist von jeder Seite höchstens ein Würfel angewachsen. Der Durchschnitt D einer Richtseitenebene mit dem Stamm ist also ungerade, und $\sigma_{x_\mu}(D)$ ist nach dem Nachkommensatz lückenlos mit Würfeln des Stamms erfüllt. Enthielte der Stamm noch Raumteile außerhalb dieses Schattens, so gäbe es auch eine Richtseitenebene, deren Durchschnitt D_1 mit dem Stammgebiet über $\sigma_{x_\mu}(D)$ hinausragte; $\sigma_{x_\mu}(D_1)$ müßte also ebenfalls ganz im Stammgebiet liegen, ist aber andererseits nicht lückenlos mit Würfeln des Stamms erfüllt. [1])

Satz 9 (Verschiebungssatz). *Verschieben wir alle Würfel eines Stammes* $\mathfrak{S}(x_\mu)$ *um einen beliebigen Betrag in der* x_μ*-Richtung gegen alle anderen Würfel des Raumes, so bleibt die Lückenlosigkeit und Schlichtheit der Raumerfüllung erhalten.*

Denn $\mathfrak{S}$ geht durch eine Verschiebung nach der x_μ-Richtung in sich über nach Definition des Schattens.

Die *Normalerfüllung* sei eine Würfelanordnung, in der $\xi \equiv \xi^0 \pmod 1$ für alle Würfel des Raumes^n, und in der jeder Punkt $\underset{(n)}{x} \equiv \xi^0 \pmod 1$ Mittelpunkt eines Würfels ist.

Satz 10. *Jede beliebige Erfüllung des Raumes mit Würfeln kann man kontinuierlich zur Normalerfüllung verschieben und aus ihr entwickeln, ohne ihre Lückenlosigkeit oder ihre Schlichtheit zu verletzen.* Die Reihenfolge der Koordinatenrichtungen, in denen verschoben wird, ist dabei gleichgültig.

Wir müssen nur alle Stämme derart in der x_1-Richtung verschieben, daß es in jedem Stamm einen Würfel gibt, für den $\xi_1 = \xi_1^0$. Dann ist $\xi_1 \equiv \xi_1^0 \pmod 1$ für alle Würfel nach der Definition der Staffel.

Dasselbe Verfahren können wir in allen anderen Koordinateneinrichtungen wiederholen.

§ 6. Flächengitter.

Läßt sich eine Koordinate ξ_μ^1 eines Würfels W_1 durch Verschiebung von W_1 gleich der Koordinate ξ_μ^0 eines anderen Würfels W_0 machen, so wollen wir dies durch das Zeichen $\xi_\mu^1 \to \xi_\mu^0$ andeuten.

Ist $\xi_\mu^1 \equiv \xi_\mu^0 \pmod 1$, so ist $\xi_\mu^1 \to \xi_\mu^0$, denn es ist in diesem Falle

$$\underline{\mathfrak{S}}(x_\mu; W_1) \neq \underline{\mathfrak{S}}(x_\mu; W_0).$$

Verschieben wir nun $\underline{\mathfrak{S}}(x_\mu; W_1)$ um $(\xi_\mu^0 - \xi_\mu^1)$ nach der x_μ-Richtung, so wird $\xi_\mu^1 = \xi_\mu^0$.

Satz 11 (Gittersatz [2])). *Unter den Koordinatendifferenzen zweier beliebiger Würfel* W_0 *und* W_1 *ist mindestens eine ganze und von Null verschiedene Zahl.*

Denn sonst wäre $\xi^0 \to \xi^1$ für alle Koordinatenrichtungen, und man könnte W_1 in W_0 hineinschieben.

Die Gesamtheit aller Flächen^i, die aus einer Richtfläche f^i durch wiederholte Nachkommenbildung nach allen auf f^i senkrechten Richtungen $\bar{x}$ entstehen, wollen wir das *Gitter von* f^i nennen.

---

[1]) Eine unmittelbare Herleitung der Stammeigenschaften gab Beppo Levi, l. c. [S. 232, Anm. 1] pg. 327, § 12.

[2]) Siegel bewies diesen Satz unter Benutzung von Methoden der analytischen Zahlentheorie für den Fall der gitterförmigen Würfellagerung. (Vgl. Einleitung.)

Das Gitter einer Seitenfläche$^{i}_{(n-i)}$ ($\bar{x} = 0$) eines Würfels W_0 enthält keinen inneren Punkt eines Würfels W_1. Denn sonst wären die Koordinatendifferenzen $|\bar{\xi}^1 - \bar{\xi}^0| < 1$, und die Koordinatendifferenzen $\bar{\xi}^1 - \bar{\xi}^0 \not\equiv 0 \pmod 1$, was nach dem Gittersatz nicht möglich ist.

Ist eine Richtfläche F^i nach einer Richtung $\bar{x}_\mu$ in irgendeiner Staffel ungerade, so liegt auch im Gitter des Schattens^{i+1} $\sigma_{\bar{x}_\mu}(F^i)$ kein innerer Punkt eines Würfels. Denn nach dem Nachkommensatz ist an jede Richtfläche^{i+1} des Schattens mindestens ein Würfel angewachsen.

Man könnte eine Umkehrung des Gittersatzes etwa der folgenden Art vermuten: *Eine beliebige Menge von kongruenten und parallel gerichteten Würfeln läßt sich zu einer vollständigen Raumerfüllung ergänzen, wenn sich unter den Koordinatendifferenzen zweier Würfel der Menge stets eine ganze von Null verschiedene Zahl findet.* Daß diese Vermutung *nicht* richtig ist, lehren einfache Beispiele.

Vom Gittersatz läßt sich noch eine geringfügige Verallgemeinerung angeben; da wir sie im II. Teil brauchen werden, sei sie hier angeführt.

Unter dem Schatten eines Punktes $P_0(\bar{x}^0, \bar{\bar{x}}^0)$ nach den Richtungen $\bar{x}$ wollen wir die Gesamtheit aller Punkte verstehen, für die $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}^0$.

Das *Staffelgebiet* $G(S)$ einer Staffel $S[R^0]$ 0. Dimension sei der Schatten ihrer Würfel nach allen Richtungen, die für S oder eine ihrer Teilstaffeln (über derselben Richtebene) ungerade sind.

Ist $W_0 \varepsilon S$ und $W_1 < G(S)$, so sind von den Koordinatendifferenzen von W_0 und W_1 mindestens zwei ganzzahlig.

Denn nach dem Gittersatz ist eine Koordinatendifferenz, etwa $\xi^1_\mu - \xi^0_\mu$, ganzzahlig und von Null verschieden. Dann gibt es einen Würfel W_2 der Staffel, für den $\xi^2_\mu = \xi^1_\mu$ ist. Denn gäbe es keinen solchen Würfel, so könnte nach einer Bemerkung in § 4 keine Teilstaffel von S nach x_μ ungerade sein, und W_1 läge nicht im Staffelgebiet.

Unter den Koordinatendifferenzen von W_1 und W_2 ist eine, etwa $\xi^1_\varrho - \xi^2_\varrho$ ($\varrho \neq \mu$) ganzzahlig, also $\xi^2_\varrho \equiv \xi^1_\varrho \equiv \xi^0_\varrho \pmod 1$, was zu beweisen war.

Die in § 4 gegebene Zurückführung von Staffeln höherer Dimension auf solche 0. Dimension gibt uns wohl die Möglichkeit, den Satz auch für Staffeln höherer Dimension zu formulieren. Aber die Voraussetzungen würden dann recht verwickelt, ohne daß der Satz neue Gesichtspunkte lieferte. Wir dürfen uns daher mit der obigen Fassung begnügen.

II. Teil. Anwendungen auf den 3-dimensionalen Raum.

Wir wollen nun die gefundenen Ergebnisse auf die Räume von 1, 2, 3 Dimensionen anwenden und alle möglichen Typen einer Erfüllung des Raums mit Würfeln aufzählen. Wir betrachten dabei Raumerfüllungen, die durch Verschiebung von Säulen in ihrer Längsrichtung auseinander hervorgehen, als nicht wesentlich voneinander verschieden. Bei gewissen speziellen Fällen kann es vorkommen, daß ein Würfel *mehreren* Säulen von verschiedenen Richtungen angehört, daß also die gegebene Raumerfüllung die Spezialisierung verschiedener allgemeiner Fälle darstellt. Wir entscheiden uns dann für irgend einen willkürlich und stellen diesen allgemeinen Fall dadurch her, daß wir die gewählte Säule um einen unganzen Betrag in ihrer Längsrichtung verschieben. Wir können also annehmen, daß jeder Würfel höchstens in einer Säule vorkommt.

Für $n = 1$ gibt es nur eine einzige Möglichkeit einer Zerlegung der Geraden in gleiche Strecken.

Im Falle $n = 2$ liegt jedes Quadrat in einer Säule; alle Säulen haben dieselbe Längsrichtung. Wir können dann noch zwei Fälle der Raumerfüllung unterscheiden, je nachdem die Quadratecken in der einen oder anderen Richtung ungerade sind. Als dritte Möglichkeit wäre die Normalerfüllung zu nennen, die einen gemeinsamen Spezialfall beider Fälle darstellt.

Ehe wir nun die Möglichkeiten einer Erfüllung des 3-dimensionalen Raumes im Großen aufzählen, wollen wir die verschiedenen Typen der Würfelanordnung in der

Umgebung eines Würfeleckpunktes betrachten. Wir befassen uns jedoch nur mit solchen Würfelanordnungen, die sich als Teile einer Erfüllung des ganzen Raumes mit Würfeln auffassen lassen.

§ 7. Die Umgebung eines Würfeleckpunktes.

Sei P dieser Würfeleckpunkt; wir machen ihn der bequemeren Schreibweise halber zum Koordinatenanfangspunkt. Die Raumerfüllungen in seiner Umgebung können wir nun danach einteilen, ob P in allen drei, in zwei, in einer oder in keiner Richtung ungerade ist (vgl. Fig. 6 u. 7).

1. *Sei P in allen Richtungen ungerade.* Dann hat P in jeder Richtung einen Gesellen. Die an diese angewachsenen Würfel belegen 6 Strahlen von P. Es können also an P nur zwei Würfel angewachsen sein, deren Koordinatendifferenzen sämtlich von Null verschieden sind.

2. *Sei P in zwei Richtungen ungerade, in einer Richtung gerade.* Nach Satz 4 sind genau vier Würfel an P angewachsen, die sich, wie man durch Ausprobieren leicht feststellt, durch geeignete Wahl der Koordinatenrichtungen in folgender Form darstellen lassen:

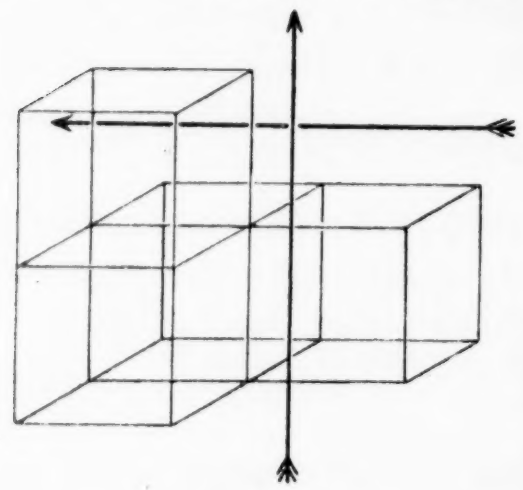

Fig. 1.

$$W_1(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$
$$W_2(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$W_3(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$W_4(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Durch mehrmalige Anwendung des Gittersatzes läßt sich beweisen, daß mindestens ein Paar dieser an P angewachsenen Würfel in einer Säule liegt. Wir können diese Säule um einen unganzen Betrag in ihrer Längsrichtung verschieben, ohne am Wesen der Raumerfüllung etwas zu ändern. Wir können also voraussetzen, *ein solcher nach zwei Richtungen ungerader Punkt komme nicht vor.*

3. *Sei P in einer Richtung, etwa x_1, ungerade, in den beiden anderen Richtungen gerade.* Nach Satz 4 sind entweder 2 oder 6 Würfel an P angewachsen.

a) Sind zwei Würfel an P angewachsen, so kann nur die Differenz ihrer x_1-Koordinaten von Null verschieden sein. *Jene beiden Würfel haben also miteinander eine ganze Seitenfläche gemein.*

Ist kein Nachkomme $N_{x_1}(P, r)$ nach allen Richtungen ungerade, so folgt durch Induktion, daß die beiden in P zusammengewachsenen Würfel in einer Säule der x_1-Richtung liegen.

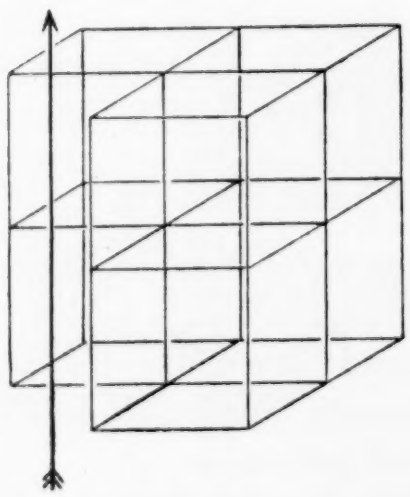

Fig. 2.

b) Seien sechs Würfel an P angewachsen. Dann hat P für die x_1-Richtung einen Gesellen, und ein daran angewachsener Würfel belegt zwei Strahlen von P. Die übrigen 6 Strahlen sind von den an P angewachsenen Würfeln in folgender Weise belegt:

$$W_1(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$W_2(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$
$$W_3(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$W_4(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$
$$W_5(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$
$$W_6(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}).$$

In ähnlicher Weise wie im Falle 2 kann man durch An-

wendung des Gittersatzes sehen, daß mindestens ein Paar der an P angewachsenen Würfel in einer Säule liegt, und wir können wieder annehmen, *ein Punkt, an den 6 Würfel angewachsen sind, komme nicht vor.*

4. *Sei P in allen Richtungen gerade.* Dann haben nach dem Grenzflächensatz die beiden Strahlen[1] von P nach einer Richtung denselben Charakter. Wir können also die hier auftretenden Fälle danach einteilen, ob es eine Richtung gibt, in der zwei der durch P hindurchlaufenden Kanten ungerade sind, oder in der eine solche Kante ungerade ist, oder ob es keine solche Richtung gibt.

a) Seien zwei der durch P hindurchlaufenden Kanten K_2 und K_3, etwa der x_2- und x_3-Richtung, nach der x_1-Richtung ungerade. An den Schatten dieser Kanten nach der x_1-Richtung ist an jede Richtfläche[2] ein Würfel angewachsen. Ein Würfel W, der einen Strahl nach x_2 und x_3 einer Richtstrecke[1] f^1 auf $\sigma_{x_1}(P)$ belegt, kann nur diesen einen Strahl belegen, da er sonst Richtflächen aus $\sigma_{x_1}(K_2)$ oder $\sigma_{x_1}(K_3)$ im Innern enthielte, und daher ist $W \overset{a}{=} f^1$. An jede Richtstrecke f^1 von $\sigma_{x_1}(P)$ sind also 4 Würfel angewachsen, und *diese Würfel liegen in Säulen der x_1-Richtung.*

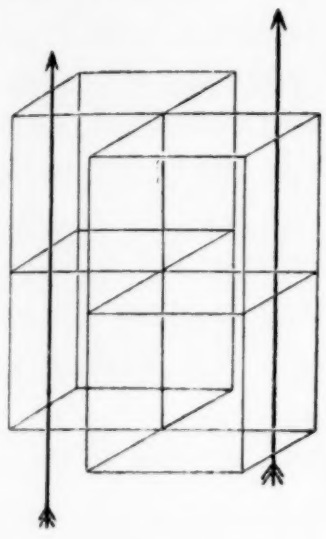

Fig. 3.

In den anderen Richtungen sind dann die durch P hindurchlaufenden Kanten gerade, $\sigma_{x_1}(P)$, da 4 Würfel an jede ihrer Richtflächen angewachsen sind, die übrigen nach Definition der Säule. *Die Fälle* a) *und* b) *unserer Unterscheidung schließen sich also gegenseitig aus.*

b) Sei von den durch P hindurchlaufenden Kanten K_2 und K_3 der x_2- bzw. der x_3-Richtung die eine, etwa K_2, in der Nähe von P $K_2 \equiv 1 \pmod{2, x_1}$, die andere $K_3 \equiv 0 \pmod{2, x_1}$. Von den vier Strahlen[2] von P nach x_2 und x_3 sind zwei nach x_1 gerade, die anderen beiden ungerade; die beiden ungeraden Strahlen s_1 und s_2 liegen auf derselben Seite von K_2, da K_3 gerade ist und nicht verschiedene Charaktere trennen kann. Die Seitenflächen $x_1 = 0$ der 4 in P zusammengewachsenen Würfel sind nach x_1 ungerade, belegen also s_1 oder s_2. Die ξ_3-Koordinaten aller 4 Würfel sind demnach einander gleich.

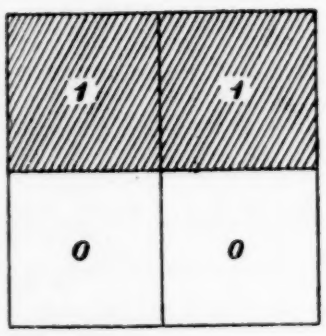

Fig. 4.

Sind nun alle Nachkommen der x_1-Richtung von P vom selben Typus wie P, so liegen alle 4 in P zusammengewachsenen Würfel in Säulen der x_1-Richtung.

Sei einer dieser Nachkommen, etwa $N_{x_1}(P, r)$, von anderem Typus. $N_{x_1}(P, r)$ kann nicht nach allen Richtungen gerade sein, denn von den durch $N_{x_1}(P, r)$ hindurch laufenden Kanten ist die eine, $N_{x_1}(K_3, r)$, nach x_1 gerade, die andere, $N_{x_1}(K_2, r)$, ungerade. $N_{x_1}(P, r)$ wäre also vom selben Typus wie P.

Ebenso kann auch $N_{x_1}(P, r)$ nicht nach allen Richtungen ungerade sein, denn als Nachkommen von P ist $N_{x_1}(P, r) \equiv 0 \pmod{2, x_1}$. N ist also in genau einer Richtung ungerade. Setzen wir nun voraus (was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit tun können), daß $N_{x_1}(P, 1)$, $N_{x_1}(P, 2)$, ..., $N_{x_1}(P, r-1)$ in allen Richtungen gerade seien, so sind die beiden an $N_{x_1}(P, r)$ angewachsenen Würfel auch an $N_{x_1}(P, r-1)$ angewachsen, haben also die gleiche ξ_1- und ξ_3-Koordinate und können sich nur durch ihre ξ_2-Koordinaten unterscheiden. Dann ist $N_{\bar{x}_1}(P, r) \equiv 1 \pmod{2, x_2}$. Es ist nun entweder einer der Nachkommen $N_{x_1}(N_{x_1}(P, r), s)$ (also ein Punkt der Ebene $x_3 = 0$) nach allen drei Richtungen ungerade, oder die an $N_{x_1}(P, r)$ angewachsenen Würfel liegen in einer Säule

der x_2-Richtung; diese können wir nach x_2 um einen unganzen Betrag verschieben, und dann wird $N_{x_1}(P, r-1)$ nach x_2 ungerade. Durch vollständige Induktion können wir also sehen:

Entweder gibt es unter den Nachkommen von P einen in nur einer Richtung ungeraden, und in der Ebene $x_3 = 0$ einen nach allen drei Richtungen ungeraden Punkt, oder die an P angewachsenen Würfel liegen in Säulen.

c) Seien alle durch P hindurchlaufenden Kanten in allen Richtungen gerade. Da es zu jeder Richtebene[2] eine parallele ungerade Richtfläche[2] gibt, die einen Strahl[2] von P belegt (die Seitenfläche[2] eines an P angewachsenen Würfels), so sind alle Richtflächen[2], die einen Strahl[2] von P belegen, nach den auf ihnen senkrechten Richtungen ungerade, und an P sind 8 Würfel angewachsen.

Wir können nun in derselben Weise wie bei der vorigen Betrachtung schließen; entweder sind alle Nachkommen einer Richtung x_1 von P vom selben Typus wie P, dann liegen alle in P angewachsenen Würfel in Säulen der x_1-Richtung. Oder wir finden unter den Nachkommen ein erstes Mal einen Punkt von anderem Typus, etwa $N_{x_1}(P, r)$; dann gibt es entweder einen in allen Richtungen ungeraden Punkt, oder alle Würfel $W \overset{a}{=} N_{x_1}(P, r)$ liegen in Säulen. Diese können wir wieder um einen unganzen Betrag in ihrer Längsrichtung verschieben, und dadurch ändern wir den Typus von $N_{x_1}(P, r-1)$. Dann folgt durch vollständige Induktion:

Entweder es gibt einen in drei Richtungen ungeraden Punkt, oder die an P angewachsenen Würfel liegen in Säulen.

§ 8. Die Raumerfüllung im Großen.

Wir zerlegen nun den Raum in *Schichten*: Zur Schicht s_i^k mögen alle Würfel gehören, für die $k - \frac{1}{2} < \xi_i \leqq k + \frac{1}{2}$. Die Erfüllung einer solchen Schicht mit Würfeln entspricht der Erfüllung einer Ebene mit Quadraten; sie kann also auf zwei verschiedene Weisen mit Würfeln geschehen. Wir werden zeigen, daß es zur vollständigen Beschreibung der Gesamtanordnung hinreicht, die Würfelanordnung in sämtlichen Schichten anzugeben, die sich bei der Zerspaltung nach jeder einzelnen der drei Koordinatenrichtungen ergeben. Umgekehrt liefert jede denkbare Typenzusammenstellung für diese Schichten eine mögliche Raumerfüllung. Die Spezialfälle werden berücksichtigt, wenn wir für jede dieser Schichten die Normalerfüllung als möglichen Typus zulassen.

Zum Beweise gehen wir den anderen Weg: Wir gehen von dem Verhalten in der Umgebung eines Punktes aus. Es wird sich zeigen, daß es zwei wesentlich verschiedene Fälle gibt, je nachdem irgendwo im Raume *ein nach drei Richtungen ungerader Punkt* vorkommt oder nicht. Wir untersuchen zunächst den

Ersten Fall: Es gibt einen nach allen drei Richtungen ungeraden Punkt *P*.

Seien W_0 und W_0' die beiden in P zusammengewachsenen Würfel. Jede Staffel 0. Dimension, die W_0 und W_0' enthält, ist von der dritten Ordnung. Das Staffelgebiet ist der ganze Raum; nach dem erweiterten Gittersatz sind unter den Koordinatendifferenzen eines beliebigen Würfels W_1 von denen von W_0 mindestens zwei ganze Zahlen.

Ist die dritte Koordinate, etwa $\xi_3^1 \not\equiv \xi_3^0 \pmod 1$, so ist auch $\xi_3 \not\equiv \xi_3^0 \pmod 1$ für alle Würfel $W < \sigma_{x_3}(W_1)$, also

$$\xi_{1,2} \equiv \xi_{1,2}^0 \equiv \xi_{1,2}^1 \pmod 1, \text{ und, da } |\xi_{1,2} - \xi_{1,2}^1| < 1, \text{ sogar } \xi_{1,2}^1 = \xi_{1,2}^1.$$

Wir haben also:

Alle Würfel, die nicht zur größten Staffel über W_0 gehören, liegen in Säulen.

Sei $\underline{S}^3[R^0]$ eine kleinste Staffel über W_0. Es gebe einen Würfel $W_1 \varepsilon \underline{S}^3$ mit einem nur in einer, etwa der x_1-Richtung, ungeraden Eckpunkt $E_1(x = x^1)$. *Dann ist jeder Punkt* $P \div \underline{S}^3$ *der Ebene* $x_1 = x_1^1$ *höchstens in der* x_1*-Richtung ungerade.*
(3)

$\sigma_{x_1}(E_1)$ muß eine in einer, etwa der x_2-Richtung ungerade Richtstrecke enthalten. Denn sonst wären an jede Richtstrecke von $\sigma_{x_1}(E_1)$ 4 Würfel angewachsen, und diese, also auch W_1, müßten in Säulen der x_1-Richtung liegen, entgegen der Annahme. Eine Richtstrecke $f_0 < \sigma_{x_1}(E_1)$ kann auch nicht in zwei Richtungen ungerade sein, da dann nach Satz 4 4 Würfel an f_0 angewachsen wären, und f_0 nach beiden Richtungen gerade wäre.

Sei also f eine nach x_2 ungerade Richtfläche des Schattens. Die Gesamtheit der auf f und aufeinander unmittelbar folgenden, nach x_2 ungeraden Richtstrecken wird nach dem Grenzflächensatz begrenzt von einem nach x_2 ungeraden Punkt P_1. P_1 ist Nachkomme von E_1, denn sonst hätten die in P_1 zusammengewachsenen Würfel eine zu W_1 (mod 1) inkongruente x_1-Koordinate, lägen in Säulen der x_1-Richtung, und P_1 wäre nach x_2 gerade.

Da nun P_1 als Nachkomme von E_1 nach x_1 und nach Definition nach x_2 ungerade ist, und da wir einen nur nach zwei Richtungen ungeraden Punkt ausgeschlossen haben, ist P_1 auch nach x_3 ungerade und trennt eine nach x_2 ungerade Richtstrecke von einer nach x_3 ungeraden. Jede Richtstrecke von $\sigma_{x_1}(E_1)$ ist also nach x_2 oder nach x_3 ungerade. Seien die beiden von E_1 getrennten Richtstrecken f_1 und f_2 etwa nach x_2 ungerade. (Da E_1 nach x_2 gerade ist, haben sie nach x_2 denselben Charakter). Die Gesellen von f_1 und f_2 in der x_2-Richtung sind ungerade Richtstrecken von von $\underline{S}^3$ verschiedenen Staffeln S_1 und S_2. Nach der obigen Bemerkung sind S_1 und S_2 Säulen der x_2-Richtung. Da unter den Koordinatendifferenzen ihrer Würfel von denen der in E_1 zusammengewachsenen Würfeln mindestens zwei ganze Zahlen vorkommen, läuft eine gemeinsame Kante der x_2-Richtung von S_1 und S_2 durch E_1 hindurch.

Angenommen nun, es gäbe in der Ebene $x_1 = x_1^1$ einen nach x_3 ungeraden Punkt P_2. Dieser hätte für die x_3-Richtung einen Gesellen P_3, der ebenfalls in der Ebene $x_1 = x_1^1$ läge. Entweder die an P_2 oder die an P_3 angewachsenen Würfel lägen dann in einer Säule der x_3-Richtung, die mit S_1 oder mit S_2 einen Würfel gemein hätte, welchen Fall wir ausgeschlossen haben.

Ist ein Punkt P_4 der Ebene $x_1 = x_1^1$ nach x_2 ungerade, so kann er nur nach x_2 ungerade sein; unter seinen Nachkommen in der x_2-Richtung findet sich dann ebenfalls kein nach drei Richtungen ungerader Punkt. Die an P_4 angewachsenen Würfel liegen in Säulen der x_2-Richtung, und P_4 ist nicht Richtpunkt von $\underline{S}^3$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist $P_2(x^2) \div \underline{S}^3$ *ein Punkt der Ebene* $x_1 = x_1^1$*, so haben die an* P_2 *angewachsenen Würfel paarweise eine ganze Seitenfläche* $x_1 = x_1^1$ *gemein, und ihre* ξ_2*- und* ξ_3*-Koordinaten sind einander gleich.*

Ist $P_2 \equiv 1 \pmod{2, x_1}$, so ist P_2 vom Typus 3a (§ 7), und die Behauptung ist richtig.

Sei $P_2 \equiv 0 \pmod{2, x_1}$, also nach allen Richtungen gerade. P_2 kann nicht vom Typus 4a sein, da $P_2 \div \underline{S}^3$. Ist P_2 vom Typus 4b, so kann nicht die ξ_1-Koordinate aller an P_2 angewachsenen Würfel dieselbe sein, da dann entweder alle in P_2 zusammengewachsenen Würfel in Säulen lägen, was wir ausgeschlossen haben, oder in der Ebene $x_1 = x_1^1$ ein nach allen Richtungen ungerader Punkt vorkäme, was nicht möglich ist.

Sei also etwa die ξ_2-Koordinate aller 4 Würfel gleich, und diese mögen etwa von $+ x_2$ an P_2 angewachsen sein; dann belegen diese Würfel alle vier Strahlen von P_2 nach $+ x_2$, und je ein Paar hat eine ganze Seitenfläche $x_1 = x_1^1$ gemein.

Ist endlich P_2 vom Typus 4c, so sind 8 Würfel an P_2 angewachsen, und die Behauptung ist trivial.

Wir zerlegen nun den Raum nach der x_1-Richtung in Schichten. Es mögen etwa die Schichten s_k und s_{k+1} außer anderem durch Teile der oben erwähnten Ebene $x_1 = x_1^1$ getrennt werden. Jedem Würfel von s_k, der der Staffel $\underline{S}^3$ oder einer Säule der x_1-Richtung angehört, entspricht ein Würfel derselben Staffel und mit denselben ξ_2- und ξ_3-Koordinaten in s_{k+1}. s_k und s_{k+1} unterscheiden sich also lediglich durch die ξ_1-Koordinaten und möglicherweise durch die ξ_2-Koordinaten von Würfeln, die in Säulen der x_2-Richtung liegen. Lassen wir nun eine dieser Schichten, etwa s_k, weg, und lassen s_{k+1} unmittelbar auf s_{k-1} folgen, so ändern wir an den Zusammenhangsverhältnissen von $\underline{S}^3$ nichts. Diesen Vorgang wollen wir *Schrumpfen* nennen. Die ursprüngliche Raumerfüllung erhalten wir aus der geschrumpften durch *Dehnung*: Wir halbieren sämtliche Würfel einer Schicht und lassen sich beide Hälften wieder zu vollen Würfeln auswachsen. Dabei müssen wir jedoch die beiden Scharen der übrigen Schichten noch um 1 auseinanderschieben, um die Schlichtheit der Raumerfüllung nicht zu gefährden. Nötigenfalls verschieben wir noch Säulen, die ganz in einer Schicht liegen, um einen gewissen Betrag in ihrer Längsrichtung.

Wir lassen nun die Raumerfüllung überall dort schrumpfen, wo ein Richtpunkt von $\underline{S}^3$ nach nur einer Richtung ungerade ist, so daß wir schließlich, vielleicht erst nach unendlich vielen Schritten, (und dann eine im Endlichen abbrechende) Raumerfüllung erhalten, in der $\underline{S}^3$ keinen nach nur einer Richtung ungeraden Richtpunkt mehr besitzt.

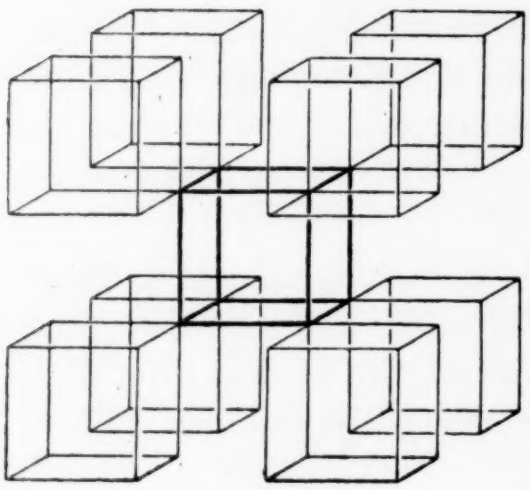

Fig. 5.

Ein Richtpunkt $P \div \underline{S}^3$ kann dann auch nicht in allen Richtungen gerade sein, denn wäre P vom Typus 4b (§ 7), so gäbe es unter seinen Nachkommen einen nach nur einer Richtung ungeraden Punkt, an den Würfel von $\underline{S}^3$ angewachsen wären. Wäre P vom Typus 4c, so gäbe es unter seinen Nachkommen ebenfalls einen Punkt von anderem Typus, der höchstens nach einer Richtung ungerade sein könnte. Alle Richtpunkte von $\underline{S}^3$ sind also nach allen Richtungen ungerade. Eine solche Staffel wollen wir eine *Normalstaffel* nennen. Die Mittelpunkte ihrer Würfel bilden ein Gitter der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und jeder Punkt, für den $\underset{(3)}{x} \equiv 0 \pmod 1$, ist ein nach allen drei Richtungen ungerader Richtpunkt von $\underline{S}^3$. Wir haben also den

Satz 12 (Dehnungssatz). *Jede beliebige Raumerfüllung, in der ein nach drei Richtungen ungerader Punkt vorkommt, läßt sich aus einer Raumerfüllung mit einer Normalstaffel durch Dehnung herstellen* [1]).

Sei S nun eine beliebige Staffel 0. Dimension 3. Ordnung; sei P einer ihrer nach allen Richtungen ungeraden Richtpunkte, W_0 und W_0' die beiden an P angewachsenen Würfel. Es sind, wie man durch Ausprobieren leicht feststellt, noch zwei Raumerfüllungen in der Umgebung von P möglich, die zueinander zentralsymmetrisch in bezug auf P liegen. Legt man die positiven Richtungen der Koordinatenachsen so fest, daß die drei Koordinatendifferenzen von W_0 und W_0' das gleiche Vorzeichen haben, so kann man den beiden möglichen Raumerfüllungen die beiden Drehsinne der an die Schatten von P angewachsenen Säulen um die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte von W_0 und W_0'

[1]) Durch diese Fassung des Satzes ist die Unannehmlichkeit der im Endlichen abbrechenden Raumerfüllung vermieden, die wir mit seiner Umkehrung zu einem Schrumpfungssatz ohne Widerrede in Kauf nehmen müßten.

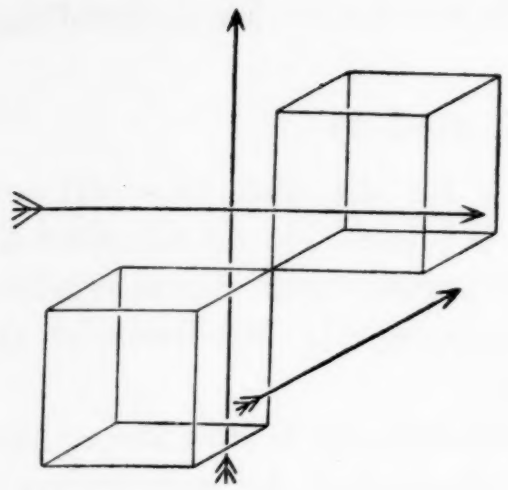

Fig. 6.

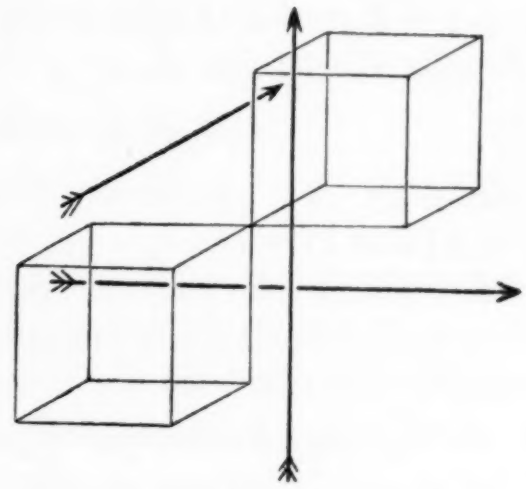

Fig. 7.

zuordnen. Wählen wir einen dieser beiden Drehsinne für den Punkt P willkürlich, so haben wir damit auch schon über den Drehsinn in allen nach drei Richtungen ungeraden ersten Nachkommen von P verfügt. Denn jeder solche Nachkomme wirft einen Schatten, an den eine auch an P angewachsene Säule angewachsen ist. Durch vollständige Induktion kann man erkennen, *daß durch die Wahl des Drehsinnes in einem Punkte die Entscheidung auch schon für alle übrigen in allen Richtungen ungeraden Punkte getroffen ist.*

Dieser eine Freiheitsgrad in der Wahl des Drehsinnes zeigt sich auch bei der Betrachtung der Schichten. Durch die Staffel ist nur gegeben, an welchen Stellen die Säulenrichtung von einer Schicht zur anderen wechselt, und wo sie dieselbe bleibt. Wir können also noch die Säulenrichtung in einer Schicht beliebig wählen; daß wir jedoch nicht für jede Zerspaltungsrichtung einen Freiheitsgrad erhalten, können wir doch wieder nur durch Drehsinnbetrachtungen erkennen.

Die gegebene Raumerfüllung ist also vollständig (bis auf Verschiebungen der Säulen in deren Längsrichtungen) beschrieben durch:

1. *Drei nach beiden Seiten unendliche Reihen positiver Zahlen, wovon die ν. Zahl der μ. Reihe angeben soll, wieviele Dehnungen der ν. Schicht in der x_μ-Richtung auszuführen sind* (wieviele Schichten des gleichen Typus jeweils unmittelbar aufeinander folgen).

2. *Durch Angabe des Drehsinnes in einem beliebigen nach drei Richtungen ungeraden Punkt*, oder, was dasselbe ist, durch Angabe der Säulenrichtung in einer beliebigen Schicht.

Umgekehrt gibt es zu jeder denkbaren Zusammenstellung dieser Angaben eine Raumerfüllung.

Kommt in einer Zeile nur die eine Zahl ∞ vor, so haben wir den zweiten Fall vor uns.

Zweiter Fall: Es gibt keinen nach allen Richtungen ungeraden Punkt.

Dann liegen nach § 7 alle Würfel in Säulen.

Satz 13 (Plattensatz). *Kommt in einer Raumerfüllung kein nach allen Richtungen ungerader Punkt vor, so gibt es eine Koordinate, etwa ξ_1, sodaß $\xi_1 \equiv \xi_1^0 \pmod 1$ für alle Würfel des Raumes. Die Raumerfüllung zerfällt also in „Platten“.*

Zum Beweise unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem es eine nach einer Richtung ungerade Richtstrecke auf einer Säulenkante gibt oder nicht.

1. *Seien sämtliche Richtstrecken auf allen Säulenkanten nach beiden Richtungen gerade.* Sei $\Sigma_0(\xi_{2,3} = \xi_{2,3}^0)$ eine Säule der x_1-Richtung und Σ_s die Gesamtheit aller Würfel,

für die $|\xi_{2,3} - \xi^0_{2,3}| \leqq s$. Angenommen, Σ_{s-1} bestünde aus Säulen der x_1-Richtung, und es sei für alle Würfel aus Σ_{s-1}

$$(1) \qquad \xi_2 \equiv \xi^0_2 \pmod 1, \qquad \xi_3 \equiv \xi^0_3 \pmod 1.$$

Wir betrachten die „äußeren" Kanten von Σ_{s-1}, für die also $|x_2 - \xi^0_2| = s - \frac{1}{2}$, $x_3 \equiv \xi^0_3 + \frac{1}{2} \pmod 1$ oder $|x_3 - \xi^0_3| = s - \frac{1}{2}$, $x_2 \equiv \xi^0_2 + \frac{1}{2} \pmod 1$. An alle diese Kanten ist an jede Richtstrecke in jedem Strahl[2] ein Würfel angewachsen. Diese Würfel liegen in Säulen, und ihre Koordinaten erfüllen die Bedingungen (1). Mit ihnen ist aber Σ_s ausgeschöpft, und somit ist die Behauptung richtig.

2. *Es liege eine Richtstrecke $F_0(x^0_{2,3})$ auf einer Säulenkante K etwa der x_1-Richtung, und F_0 sei in einer Richtung, etwa x_2, ungerade.* Die Gesamtheit der unmittelbar auf F_0 und aufeinander folgenden nach x_2 ungeraden Richtstrecken auf K wird nach dem Grenzflächensatz von einem nach x_2 ungeraden Richtpunkt P begrenzt. Die an P angewachsenen Würfel liegen in Säulen der x_2-Richtung. Verschieben wir diese um einen unganzen Betrag nach x_2, so wird P nach x_2 gerade, und wir haben zu jener Gesamtheit ungerader Richtstrecken noch weitere nach x_2 ungerade Richtstrecken von ganzzahliger, nicht verschwindender Gesamtlänge hinzugefügt. Durch mehrmalige (unter Umständen unendlich oftmalige) Anwendung dieses Verfahrens können wir erreichen, daß alle Richtstrecken auf K nach x_2 ungerade sind. An jede Richtfläche von $\sigma_{x_3}(K)$ ist also mindestens ein Würfel angewachsen, und $\sigma_{x_3}(K)$, also die Ebene $x_3 = x^0_3$, enthält keinen inneren Punkt eines Würfels; sämtliche Würfel ordnen sich also in Platten $\xi_3 \equiv x^0_3 + \frac{1}{2} \pmod 1$ an.

Eine Raumerfüllung, die keine nach drei Richtungen ungeraden Punkte enthält, ist also vollständig beschrieben durch *Angabe der Plattenrichtungen und durch eine nach beiden Seiten unendliche Reihe von positiven ganzen Zahlen, die angeben, wieviele Platten mit Säulen der einen bzw. der anderen Richtung unmittelbar aufeinander folgen.*

Bei Betrachtung der Schichten zeichnet sich dieser Fall dadurch aus, daß für mindestens eine, also mindestens zwei Zerspaltungsrichtungen alle Schichten vom gleichen Typus werden.

Eingegangen 30. Dezember 1929.

Über einen Takagischen Satz.

Von *Michael Bauer* in Budapest.
(Aus einem Briefe an H. Hasse.)

1. Herr *T. Takagi* [1]) hat in seiner Arbeit „On the mutual reduction of algebraic equations" einen algebraischen Reziprozitätssatz des Herrn *A. Loewy* [2]) vertieft. Der Beweis gilt für vollkommene Grundkörper, welche unendlich viele verschiedene Elemente besitzen. Nun habe ich bemerkt, daß der Abelsche Satz, den Takagi a. a. O. benützt, nicht angewendet werden muß; derselbe kann sogar mitbewiesen werden. Der so modifizierte Beweis soll hier zusammenhängend dargestellt werden.

2. Es seien

$$(1) \qquad F(x) = \prod_{\mu=1}^{m}(x - \alpha_\mu) = 0, \quad G(y) = \prod_{\nu=1}^{n}(y - \beta_\nu) = 0$$

im Körper P irreduzible Gleichungen, zwei beliebige Wurzeln sollen durch α, β bezeichnet werden, ferner sei das Polynom $\varphi(x, y)$ in P so gewählt, daß die Größen $\gamma_{\mu\nu} = \varphi(\alpha_\mu, \beta_\nu)$ voneinander verschieden sind. Dieselben genügen in P einer Gleichung $H(z) = 0$. Es sei im Körper P

$$(2) \qquad H(z) = h_1(z)\, h_2(z) \cdots h_e(z),$$

wo die $h_i(z)$ irreduzible Polynome vom Grade k_i sind. Es sollen die größten gem. Teiler

$$(3) \qquad (h_i(\varphi(x, \beta)),\ F(x)) = f_i(x, \beta), \qquad h_i(\varphi(\alpha, y),\ G(y)) = g_i(y, \alpha)$$

genauer betrachtet werden. Jedes $f_i(x, \beta_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ hat denselben Grad, er soll durch m_i bezeichnet werden. Die Summe der Grade von $f_i(x, \beta_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ist einerseits gleich $m_i n$, andererseits gleich dem Grade von $h_i(z) = 0$, also gleich k_i. Da F und G vertauscht werden können, folgt

$$(3^*) \qquad k_i = m_i n = m n_i, \qquad \frac{m}{n} = \frac{m_i}{n_i},$$

wo n_i der Grad von $g_i(y, \alpha)$ ist. Wenn z. B. $h_i(\varphi(\alpha, \beta)) = 0$ und $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$ ausfallen, dann ist der Körper $\mathsf{P}(\gamma)$ vom Grade $k_i = m_i n = m n_i$ im Körper $\mathsf{P}(\alpha, \beta)$ enthalten.

---

[1]) Proceedings of the Imperial Academy (of Japan) **2** (1926), S. 41—42.

[2]) *A. Loewy*, Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale, Math. Zeitschrift **15** (1922), S. 261—273. Die Sätze sind von *Fr. K. Schmidt* auf allgemeine Körper erweitert worden: Verallgemeinerung eines von Herrn *A. Loewy* stammenden Reziprozitätssatzes für algebraische Gleichungen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1925, 5. Abh., S. 19—26. — Vgl. noch meine Note: Bemerkung zur Algebra, Acta Litter. ac Scientiarum **4**, S. 244—245. Die Beweisführung dieser Note läßt sich vereinfachen, sie kann ohne die Theorie der symmetrischen Funktionen geleistet werden. Man muß nur im Punkte 2 a. a. O. folgenderweise schließen: Da $f_l(x; \beta) = 0$ nur solche Wurzeln besitzt, welche der Gleichung $f(x) = 0$ genügen, existiert ein gewisses α_i so, daß die Gleichung $f_l(\alpha_i; x)$ mit der Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine gemeinsame Wurzel hat. Aus der Irreduzibilität von $f(x)$ folgt nun, daß jede Gleichung $f_l(\alpha; x) = 0$, $(l = 1, 2, \ldots, k)$ mit der Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine gemeinsame Wurzel besitzt.

Nach einem bekannten Satze [3]) genügt die Größe α im Körper $\mathsf{P}(\beta)$ einer irreduziblen Gleichung vom Grade $\geqq m_i$, folglich ist $f_i(x, \beta)$ im Körper $\mathsf{P}(\beta)$ und ebenso $g_i(y, \alpha)$ im Körper $\mathsf{P}(\alpha)$ irreduzibel, und es ist ersichtlich

$$(4) \qquad \begin{aligned} F(x) &= f_1(x, \beta) f_2(x, \beta) \cdots f_e(x, \beta) \\ G(y) &= g_1(y, \alpha) g_2(y, \alpha) \cdots g_e(y, \alpha). \end{aligned}$$

Aus dem Beweise folgt noch die Relation $\mathsf{P}(\gamma) = \mathsf{P}(\alpha, \beta)$, welche den Abelschen Satz ergibt.

3. Da die Relationen $h_i(\varphi(\alpha_\mu, \beta_\nu)) = 0$, $f_i(\alpha_\mu, \beta_\nu) = 0$, $g_i(\beta_\nu, \alpha_\mu) = 0$ simultan bestehen, falls irgendeine derselben richtig ist, wird noch

$$(4^*) \qquad (g_i(\beta, x),\ F(x)) = f_i(x, \beta),\ (f_i(\alpha, y),\ G(y)) = g_i(y, \alpha).$$

[3]) S. z. B. *Hasse*, Höhere Algebra **2** (Berlin 1927), Satz 73. Will man *nur* den Takagischen Satz beweisen, so kann man folgenderweise verfahren, wobei nur die Theorie der symmetrischen Funktionen angewendet wird. Die Größe α genügt im Körper $\mathsf{P}(\beta)$ einer irreduziblen Gleichung vom Grade $v_i \leqq m_i$, folglich genügt die Größe $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$ im Körper $\mathsf{P}(\beta)$ einer Gleichung vom Grade v_i und im Körper P einer Gleichung vom Grade $v_i n$. Es muß $v_i n \geqq m_i n$, also $v_i = m_i$ sein.

Eingegangen 17. November 1929.

Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen.

Von *S. Sidon* in Budapest.

In der vorliegenden Note beweise ich zunächst den

Satz I. *Erfüllt die unendliche Folge positiver ganzer Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *für jedes* n *die Ungleichung*

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1 \qquad (q \text{ konstant}), \tag{1}$$

so gilt für ein beliebiges trigonometrisches Polynom $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$ *die Ungleichung*

$$\int_0^{2\pi} |T_n(x)|\, dx > C \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]^{\frac{1}{2}},$$

wo C *eine nur von* q *abhängige positive Konstante bedeutet* [1]).

Der Beweis dieses Satzes läßt sich ganz analog führen, wie der des ihm bei rationalen Polynomen mit $q > 2$ entsprechenden, in einer früheren Arbeit [2]) enthaltenen Satzes. Wir schicken folgende zwei Hilfssätze voraus, von denen der erste identisch mit Hilfssatz III der soeben zitierten Arbeit ist:

Hilfssatz I.[3]) *Ist* $f(x)$ *eine im Intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *stetige, nicht negative Funktion,* $t_1 > t_2 > 0$, *so gilt die Ungleichung*

$$\frac{\int_a^b [f(x)]^{2t_1} dx}{\left[\int_a^b [f(x)]^{t_1} dx\right]^2} > \frac{\int_a^b [f(x)]^{2t_2} dx}{\left[\int_a^b [f(x)]^{t_2} dx\right]^2}.$$

Hilfssatz II. *Hat* $T_n(x)$ *dieselbe Bedeutung, wie in Satz I, so gilt die Abschätzung*

$$\int_0^{2\pi} T_n^4(x)\, dx < C \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]^2.$$

Beweis: Es ist

$$T_n^2(x) = \sum_{k=1}^{N}(c_k \cos \mu_k x + d_k \sin \mu_k x),$$

wo

$$\mu_N = 2\lambda_n$$
$$c_k = \Sigma \pm (a_{k_i} a_{k_l} \pm b_{k_i} b_{k_l})$$
$$d_k = \Sigma \pm (a_{k_i} b_{k_l} \pm a_{k_l} b_{k_i}).$$

Die Anzahl der Glieder der auf den rechten Seiten der letzteren Gleichungen stehenden, über alle Wertepaare k_{i_1}, k_{l_1}, für welche $\lambda_{k_i} \pm \lambda_{k_l} = \mu_k$ ist, zu erstreckenden

[1]) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ und C werden hier auch weiter die Bedeutung haben, wie in Satz I.

[2]) „Ein Satz über Fourier-Reihen mit Lücken". Erscheint in der Math. Zeitschrift.

[3]) Nach einer mündlichen Mitteilung des Herrn Paul Csillag läßt sich der beim Beweise des Satzes I angewandte Spezialfall des Hilfssatzes I $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ oder allgemeiner $t_1 = 2t_2$ auch aus der Schwarz-Hölderschen Ungleichung ableiten.

Summen bleibt unter einer nur von q abhängigen Schranke. Wird noch die für beliebige reelle x_i gültige Ungleichung $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 < n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ berücksichtigt, so ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} T_n^4(x)\,dx = \pi \sum_{k=1}^{N} (c_k^2 + d_k^2) < C\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right]^2 .$$

Beweis des Satzes I: Wird im Hilfssatz I $f(x) = |T_n(x)|$, $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ gesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\int_0^{2\pi} |\,T_n(x)\,|\,dx}{\left[\int_0^{2\pi} T_n^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}} > \frac{\int_0^{2\pi} T_n^2(x)\,dx}{\left[\int_0^{2\pi} T_n^4(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}} > C, \quad \text{qu. e. d.}$$

Ein Korollar des Satzes I ist der in loc. cit. [2]) bewiesene Satz:

Ist die trigonometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$ *eine Fourier-Reihe, so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ *konvergent.* [4])

Aus Satz I folgt unmittelbar [5])

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \cos \lambda_n x \right| dx > C n^{\frac{1}{2}} .$$

Auf Grund dieser Abschätzung läßt sich nach einer bekannten Methode [6]) für jede positive Funktion $\varphi(n)$ mit $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0$ die Existenz stetiger Funktionen mit der Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$ nachweisen, für welche bei einem beliebigen festen x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} (a_{\lambda_k} \cos \lambda_k x + b_{\lambda_k} \sin \lambda_k x) \right|}{\varphi(n)\sqrt{n}} > C,$$

also a fortiori

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} (|\,a_{\lambda_k}\,| + |\,b_{\lambda_k}|)}{\varphi(u)\sqrt{n}} > C$$

gilt. Hieraus folgt dann auf eine geläufige Weise die folgende Verschärfung eines Carlemanschen Satzes [7]):

Zu jedem $\delta > 0$ *und einer beliebigen Indexfolge* $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ *lassen sich stetige Funktionen mit der Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$ *angeben, für welche* $\sum_{k=1}^{\infty} (|\,a_{n_k}\,|^{2-\delta} + |\,b_{n_k}|^{2-\delta})$ *divergent ist.*

---

[4]) Es bleibt nämlich, wenn $S_n(x)$ das n-te Fejérsche Mittel von $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$ bedeutet, $\int_0^{2\pi} |S_n(x)|\,dx$, also auch $\int_0^{2\pi} S_n^2(x)\,dx$, unter einer von n unabhängigen Schranke.

[5]) Das erste Beispiel eines im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ beschränkten, normierten Orthogonalsystems $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, für welches $\int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \right| dx > C\sqrt{n}$ gilt, rührt von Herrn *Rademacher* her. (Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. **87** (1922), S. 112—138, spez. S. 130—134).

[6]) *H. Lebesgue*, Leçons sur les séries trigonométriques, S. 87; Sur les intégrales singulières, Ann. Toulouse (3) **1**, S. 25—117. *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. **69** (1910), S. 335—339.

[7]) *T. Carlemann*, Über die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Math. **41** (1918), S. 377—384.

Eingegangen 12. März 1930.

Göschens Lehrbücherei

Bis Ende 1930 erschienen die nachstehend verzeichneten Bände der

Gruppe 1: Reine und angewandte Mathematik

Band 1: **Irrationalzahlen.** Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. (VIII, 186 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—

Band 2: **Praxis der Gleichungen.** Von Dr. C. RUNGE, o. Prof. an der Univ. Göttingen. Zweite, verbess. Aufl. Mit 8 Fig. 1921. (V, 172 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—

Band 3: **Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Prof. Dr. PAUL BACHMANN. Dritte, neu durchgesehene Aufl. Mit einem Geleitwort herausgeg. von Dr. ROBERT HAUSSNER, ord. Prof. a. d. Univ. Jena. Mit 10 Fig. 1931. (XVI, 252 Seiten.) Brosch. 8.50, geb. 9.50

Band 4: **Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. RUDOLF FUETER, ord. Prof. an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. (VIII, 277 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 12.—

Band 5: **Automorphe Funktionen.** Von Dr. L. SCHLESINGER, ord. Professor an der Universität Gießen. 1924. (X, 205 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.20

Band 6: **Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. BECK, ord. Prof. an der Univers. Bonn. 1926. (X, 198 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50

Band 7: **Mengenlehre.** Von Dr. F. HAUSDORFF, ord. Prof. an der Univ. Bonn. Zweite, neubearb. Aufl. Mit 12 Fig. 1927. (285 Seiten.) Broschiert 12.—, geb. 13.50

Band 8: **Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Prof. an der Univ. München. Mit 4 Fig. 1927. (VIII, 307 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 11.50

Band 9: **Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. 1927. (VIII, 243 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.50

Band 10: **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. (VIII, 197 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50

Band 11: **Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. KÖNIG, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. KRAFFT, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 1928. (263 Seiten.) Broschiert 13.—, geb. 14.50

Band 12: **Methoden der praktischen Analysis.** Von Dr. FR. A. WILLERS, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 1928. (344 Seiten.) Broschiert 20.—, geb. 21.50

Band 13: **Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. ALFRED LOTZE, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 1929. (192 Seiten.) Broschiert 12.—, geb. 13.—

Band 14: **Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. HORN, o. Prof. an der Techn. Hochsch. Darmstadt. Zweite, umgearb. Aufl. Mit 8 Fig. 1929. (VIII, 228 Seiten.) Brosch. 11.—, geb. 12.—

Band 15: **Geometrische Transformationen.** Von Dr. KARL DOEHLEMANN, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. WILHELM OLBRICH, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Fig. im Text u. 4 Abbildungen. 1930. (254 Seiten.) Brosch. 13.—, geb. 14.50

Band 16: **Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Prof. Dr. MAX ZACHARIAS, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 1929. (252 Seiten.) Brosch. 13.—, geb. 14.50

Band 17: **Grundlagen der Geometrie.** Von Prof. Dr. GERHARD HESSENBERG. Herausgegeben von Dr. W. SCHWAN. Mit 77 Fig. 1930. (143 Seiten.) Broschiert 6.50, geb. 7.80

Band 18: **Integralgleichungen.** Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. 1930. (302 Seiten.) Brosch. 15.—, geb. 16.50

Im Druck:

Band 19: **Vorlesungen über Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 16 Figuren 1931.

Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10, Genthiner Str. 38